

信号処理の実例

逆フィルター

21世紀社会の構造

情報ネットワーク社会

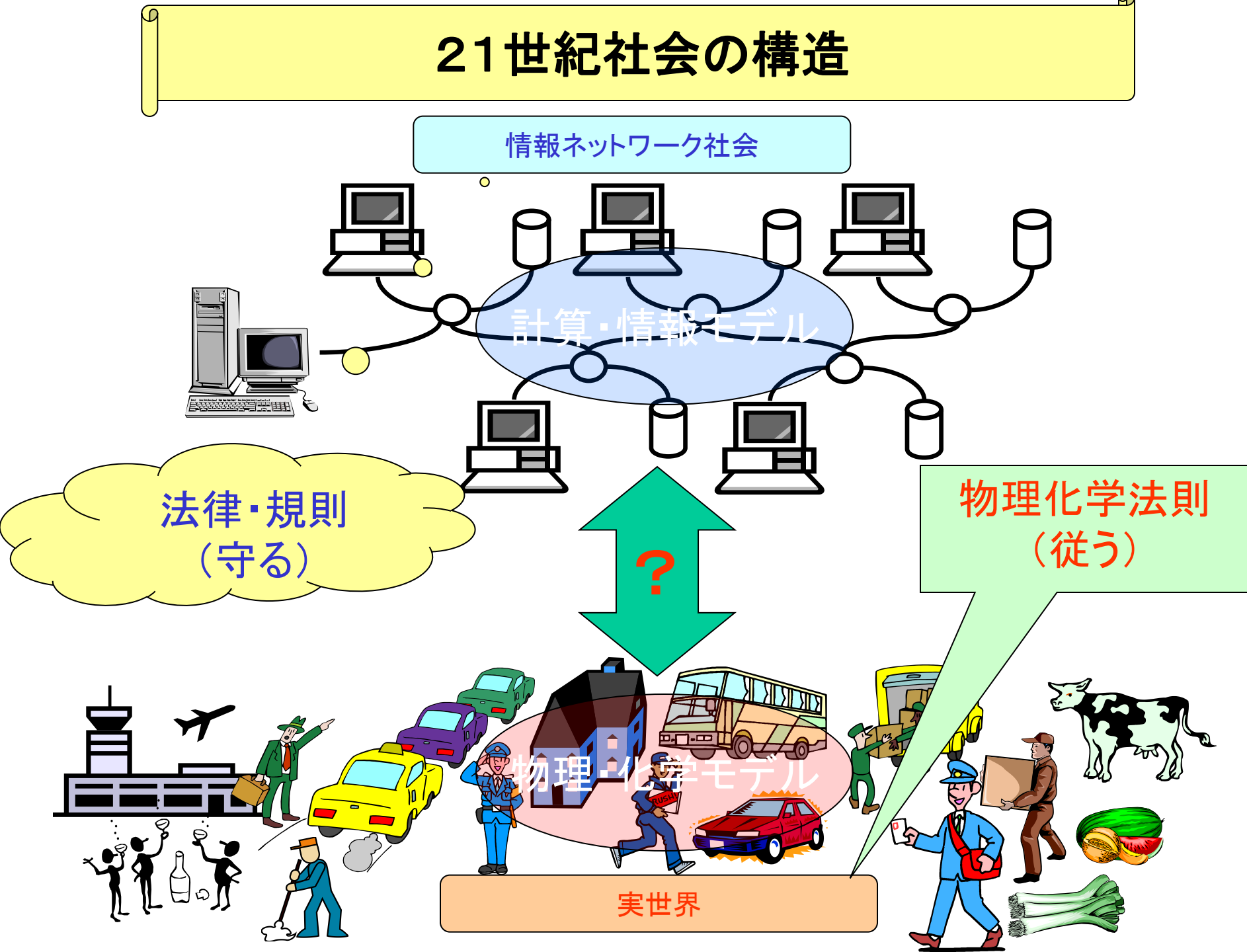
計算・情報モデル

法律・規則
(守る)

物理化学法則
(従う)

物理・化学モデル

実世界



情報ネットワーク社会

情報世界対象

数値
文字
図形
グラフ
木構造

計算・処理

変化のモデル化
シミュレーション
予測

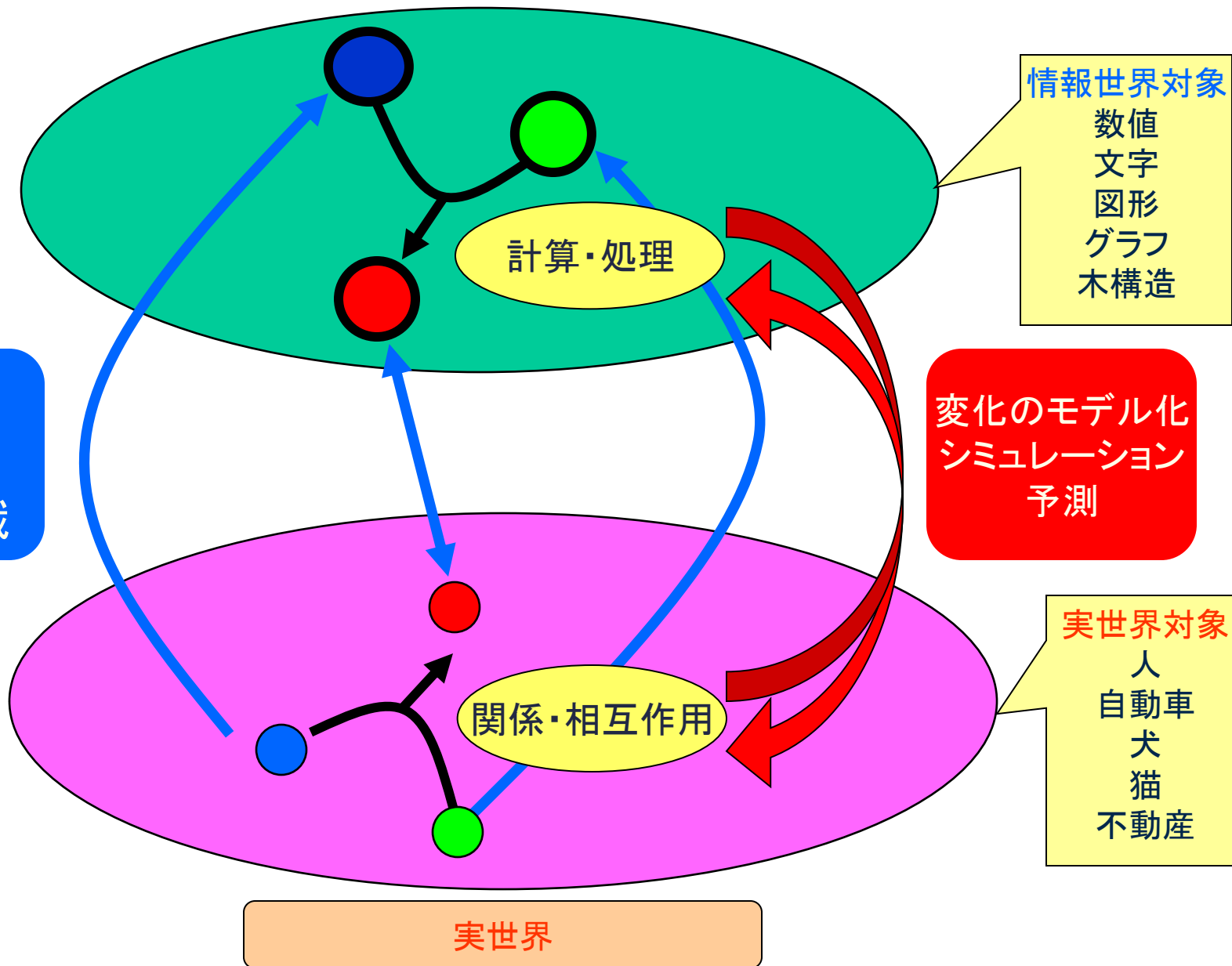
実世界対象

人
自動車
犬
猫
不動産

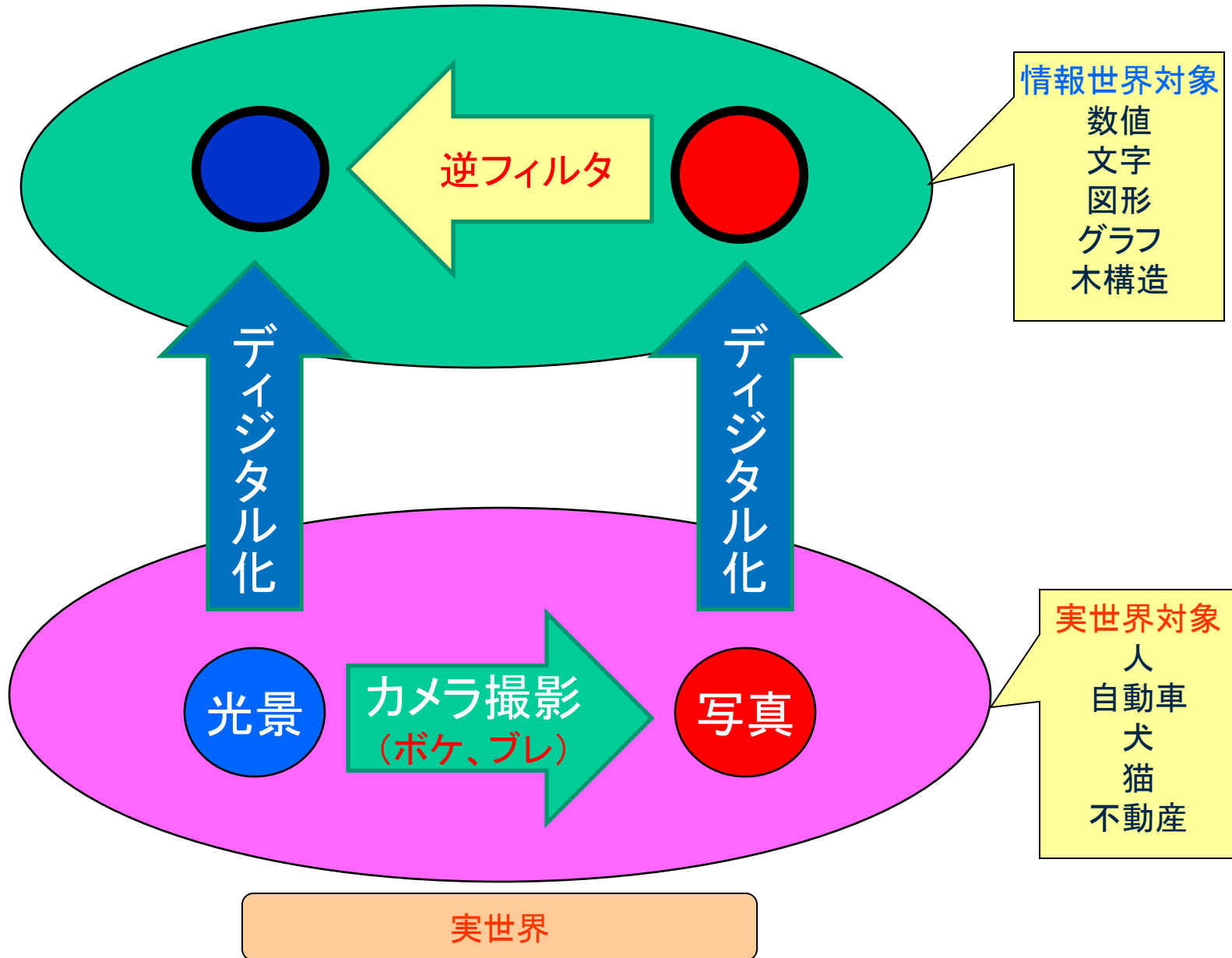
関係・相互作用

実世界

ID付与
認証
対象認識



情報ネットワーク社会



実世界での変換のモデル化

実世界における歪み（変換）過程を
畳み込みとしてモデル化する。

$f(t)$: 実世界の真の（歪みのない）対象

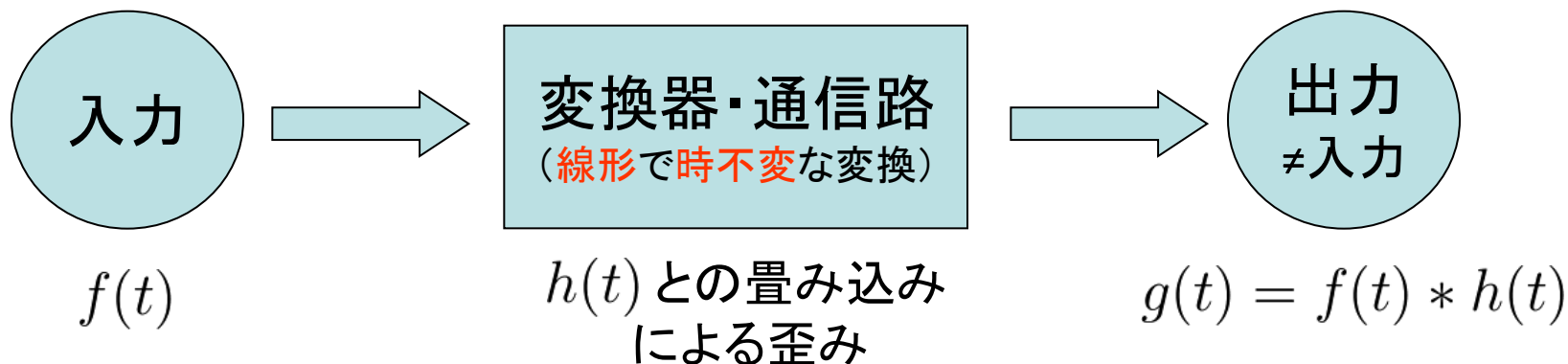
$g(t)$: 実世界の歪んだ（変換後の）対象

$h(t)$: 歪み（変換）の特性を表わす関数

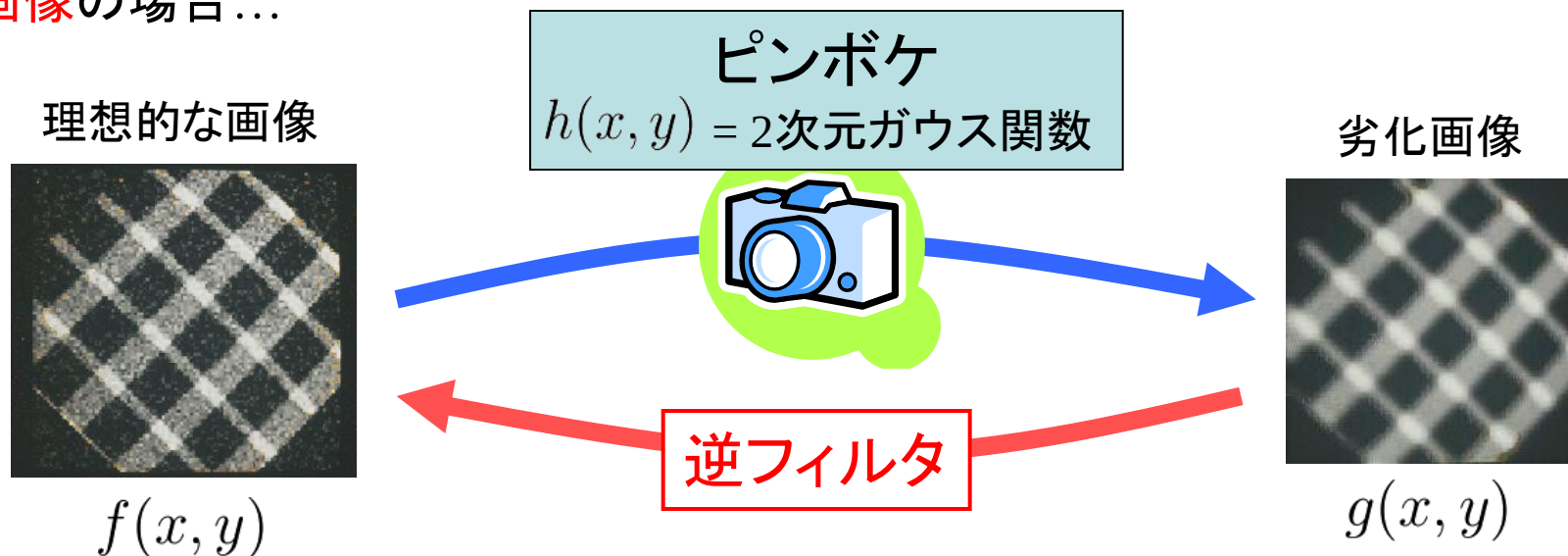
$$g(t) = f(t) * h(t)$$

逆フィルタ

畳み込みを使った劣化信号の復元

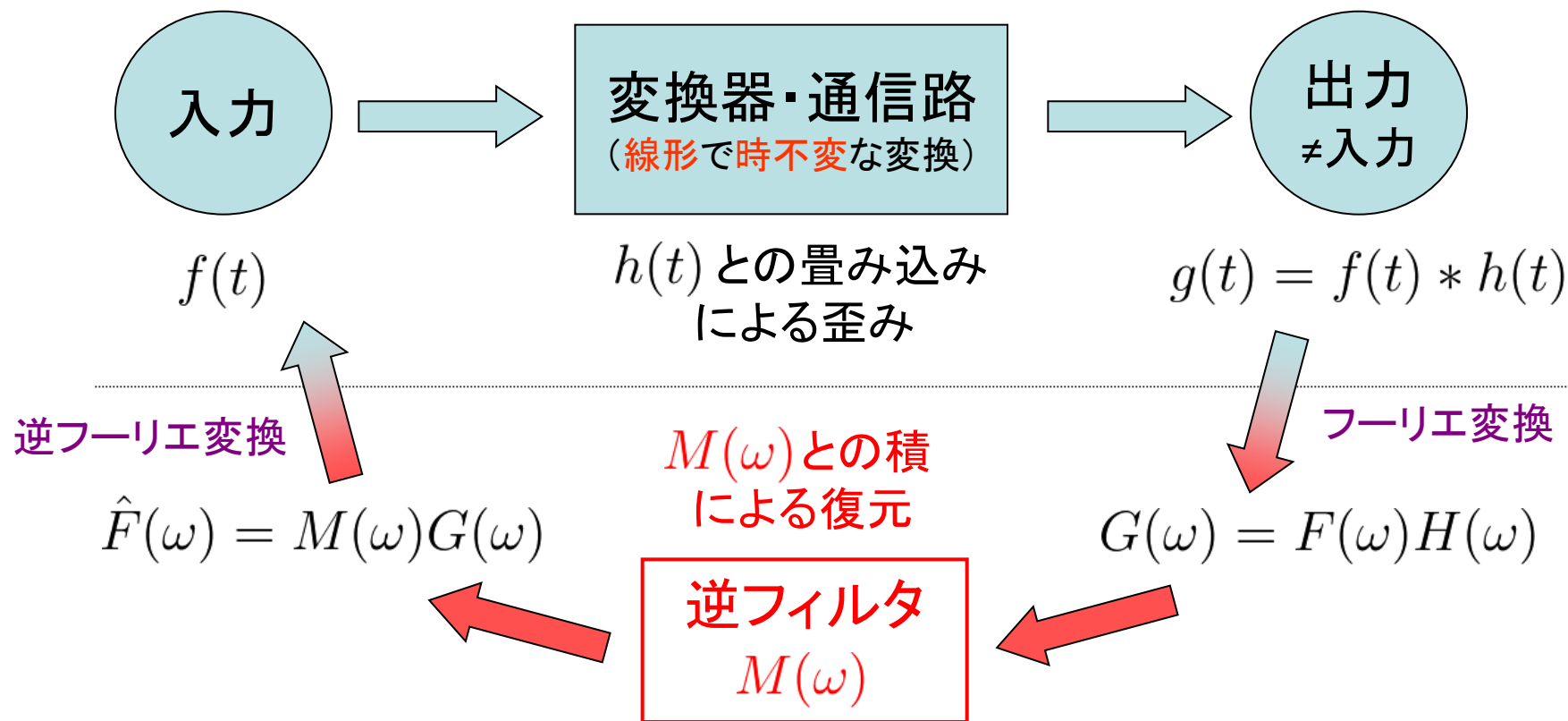


画像の場合...



逆フィルタ

畳み込みを使った劣化信号の復元



$$\underline{\underline{M(\omega) = 1/H(\omega) \text{ とすれば } \hat{F}(\omega) = F(\omega)}}$$

一般に、この逆フィルタはうまく働かない！

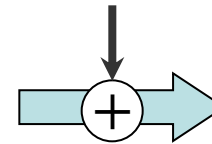
画像劣化のモデル

関数 h : 点伝がり関数 (PSF)
⇒ 画像劣化の性質を表す.

入力

変換器・通信路
(線形で時不変な変換)

雑音
 $n(x, y)$



出力
≠ 入力

位置不変な
画像劣化の
モデル

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$$

フーリエ変換

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$

$M(\omega) = 1/H(\omega)$ とすると,

この項の影響は？

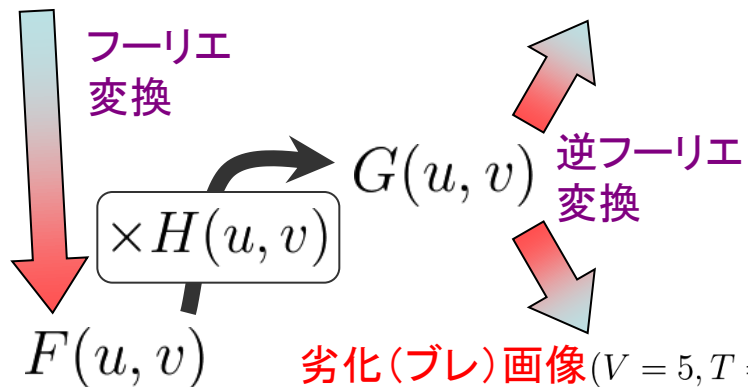
復元画像: $\hat{F}(u, v) = M(u, v)G(u, v) = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$

点広がり関数の例

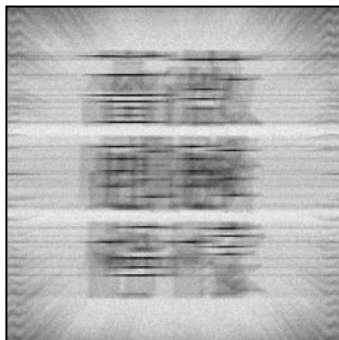
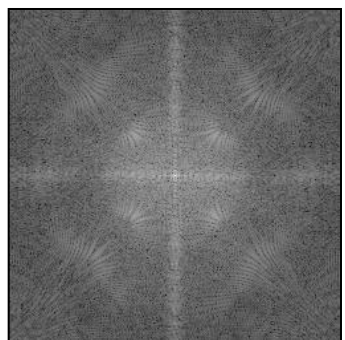
原画像 $f(x, y)$



劣化(ボケ)画像 ($\sigma = 10$)

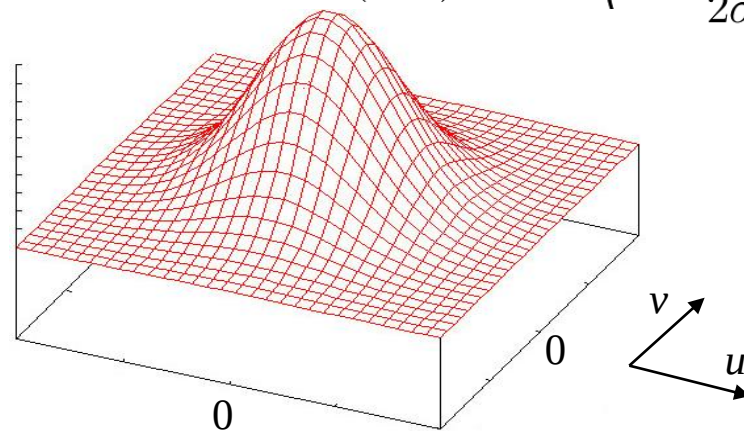


劣化(ブレ)画像 ($V = 5, T = 0.03$)



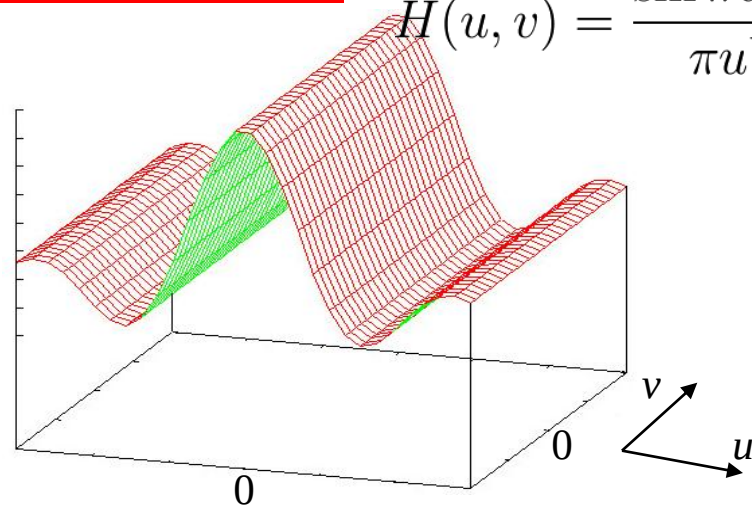
A: ピンボケ

$$H(u, v) = \exp\left(-\frac{u^2 + v^2}{2\sigma^2}\right)$$



B: 横方向のブレ

$$H(u, v) = \frac{\sin \pi u V T}{\pi u V}$$



逆フィルタの問題点と改良

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$
$$\hat{F}(u, v) = M(u, v)G(u, v)$$

◆単純な逆フィルタ

$$M(u, v) = \frac{1}{H(u, v)} \text{ の場合,}$$

$$\hat{F}(u, v) = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$$

$H(u, v)$ が小さな範囲では、
雑音成分が非常に大きくなる。

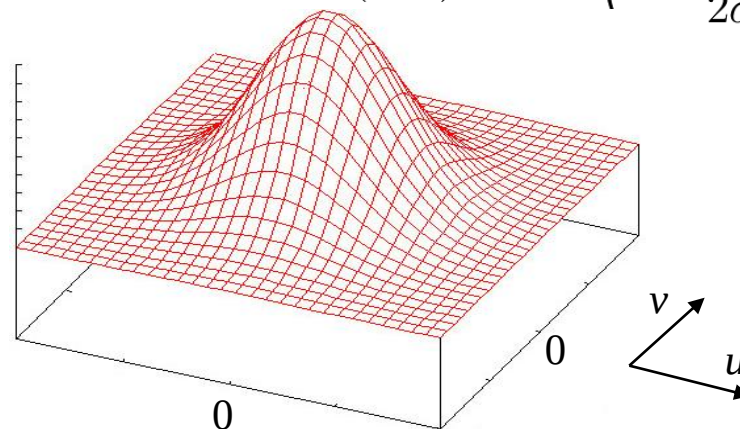
$H(u, v)$ が大きな範囲のみを利用。

$$M(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{H(u, v)} & (H(u, v) \geq th) \\ 1 & (\text{else}) \end{cases}$$

例えば、Aの場合、 $\sqrt{u^2 + v^2} \leq \omega_0$

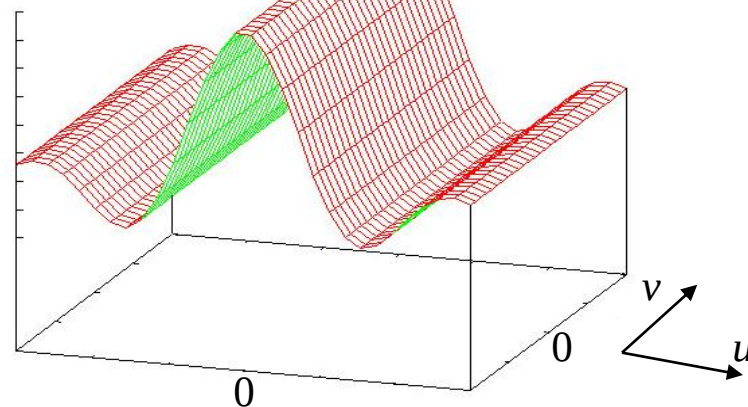
A: ピンボケ

$$H(u, v) = \exp\left(-\frac{u^2 + v^2}{2\sigma^2}\right)$$



B: 横方向のブレ

$$H(u, v) = \frac{\sin \pi u VT}{\pi u V}$$



ウィーナ・フィルタ

◆単純な逆フィルタ:

$$M(u, v) = \frac{1}{H(u, v)} \Rightarrow \text{ノイズ項を無視している}$$

雑音に弱い!

◆低周波成分のみの逆フィルタ:

$$M(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{H(u, v)} & (\sqrt{u^2 + v^2} \leq \omega_0) \\ 1 & (\text{else}) \end{cases} \Rightarrow \text{SN比が比較的大きいと考えられる低周波領域のみを利用する.}$$

◆ウィーナ・フィルタ (Wiener filter)

$$M(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + [P_N(u, v)/P_S(u, v)]}$$

* は複素共役を表す.
 P_N, P_S はそれぞれ, 雑音と原信号のパワースペクトル.

雑音に関する(統計的)性質を積極的に利用

⇒ 原画像と復元画像の平均2乗誤差を最小とするような変換を求める.

ウィーナ・フィルタの導出

$$\begin{cases} \text{劣化: } G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v) & \dots \textcircled{1} \\ \text{復元: } \hat{F}(u, v) = M(u, v)G(u, v) & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

確率場 : $F(u, v)$ と $N(u, v)$
 決定的関数 : $H(u, v)$ と $M(u, v)$

$\varepsilon = \underset{\text{平均}}{\text{E}} |F(u, v) - \hat{F}(u, v)|^2$ を最小とする $M(u, v)$ を求める.

※以下では, (u, v) を省略して表記する.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \text{E} |F - \hat{F}|^2 \\ &= \text{E} |F - MG|^2 \\ &= \text{E} |F - M(HF + N)|^2 \\ &= \text{E} |(1 - MH)F - MN|^2 \\ &= (1 - MH)(1 - MH)^* P_S + MM^* P_N \\ &= (P_S |H|^2 + P_N) |M|^2 - P_S HM - P_S H^* M^* + P_S \\ &= (P_S |H|^2 + P_N) \left| M - \frac{P_S H^*}{P_S |H|^2 + P_N} \right|^2 - \frac{P_S^2 |H|^2}{P_S |H|^2 + P_N} + P_S \end{aligned}$$

$F(u, v)$ と $N(u, v)$ は独立

$$\begin{aligned} \text{E} |F|^2 &= P_S \\ \text{E} |N|^2 &= P_N \\ \text{E} |FN^*| &= \text{E} |F^* N| = 0 \end{aligned}$$

M について整理

平方完成

ウィーナ・フィルタの導出

$$\begin{aligned}\varepsilon &= E \left| F(u, v) - \hat{F}(u, v) \right|^2 \\ &= (P_S |H|^2 + P_N) \left| M - \frac{P_S H^*}{P_S |H|^2 + P_N} \right|^2 - \frac{P_S^2 |H|^2}{P_S |H|^2 + P_N} + P_S\end{aligned}$$

誤差の最小値

ウィーナ・フィルタ (Wiener filter)

$$M(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + [P_N(u, v) / P_S(u, v)]}$$

で平均2乗誤差 ε は最小となる.

※ 通常, 正確に求めることができないので, 適当な定数 Γ で近似する.

※ 雑音成分がない ($P_N = 0$) とすると, このフィルタは

$$M(u, v) = \frac{1}{H(u, v)}$$

に一致し, 平均二乗誤差の最小値は 0 となる.

※ 確率場を用いた厳密な説明は,

「デジタル画像処理 (監訳: 長尾眞, 近代科学社, 1978)」の第7章を参照すること.

結果の比較

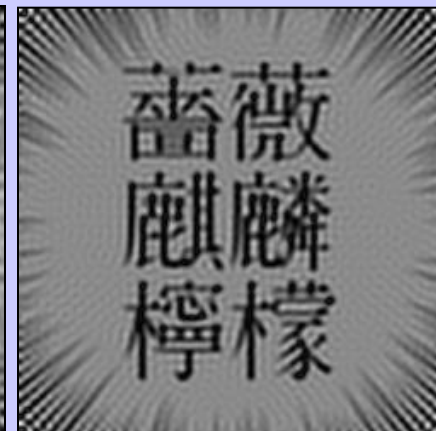
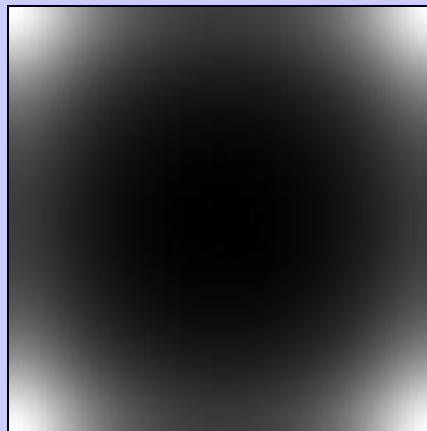
劣化画像

単純な逆フィルタ

低周波成分のみの
逆フィルタ

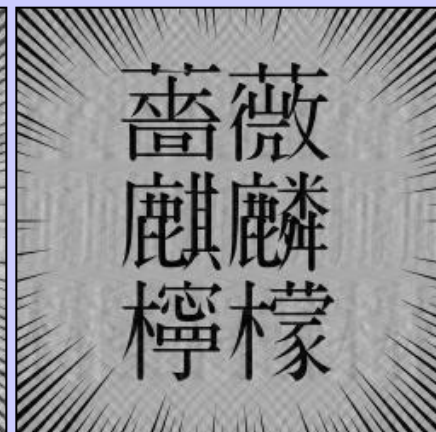
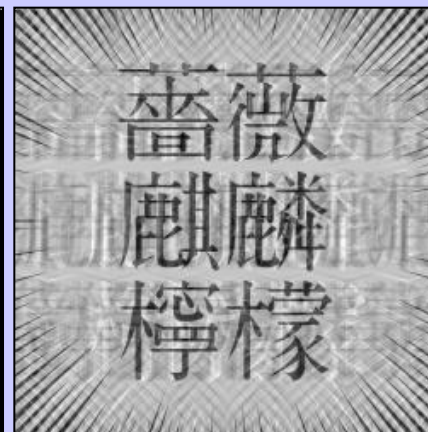
ウィーナ・フィルタ

ピンボケ



$$(\sqrt{u^2 + v^2} \leq 35)$$

横方向のブレ



$$(H(u, v) > 10^{-7})$$

課題17

1. 真黒な紙に針で穴を開け、紙の後ろに電球を置く。
カメラでフォーカスを色々変えながら、前から紙の画像を撮影すると、ピンボケによる点広がり関数を画像データとして求めることができる。
2. 紙にフォーカスを合わせた状態で、カメラのシャッタースピードを遅くし、紙を縦や横に動かして画像を撮影すると、ブレによる点広がり関数を画像データとして求めることができる。
3. 2枚の色の異なった紙を前後に離して置き、フォーカスを変えながら画像を撮影をするとどうなるかを考えてみよう。
4. 撮影した風景写真1枚を分析して、撮影時に生じた劣化を求めるには、どうすればよいか考えてみよう。

★最近米国で発売されたlight field cameraでは、撮影後に画像のフォーカスを自由に変えることができる。

https://www.lytro.com/science_inside

これまでの復習とこれからの課題

アナログ信号

- ・フーリエ変換とラプラス変換
- ・デルタ関数の導入によるフーリエ変換の拡張
- ・2次元フーリエ変換(2次元周波数)
- ・畳み込み演算、相関関数
- ・CTの原理(1次元フーリエ変換と2次元フーリエ変換の関係)
- ・逆フィルター

標本化

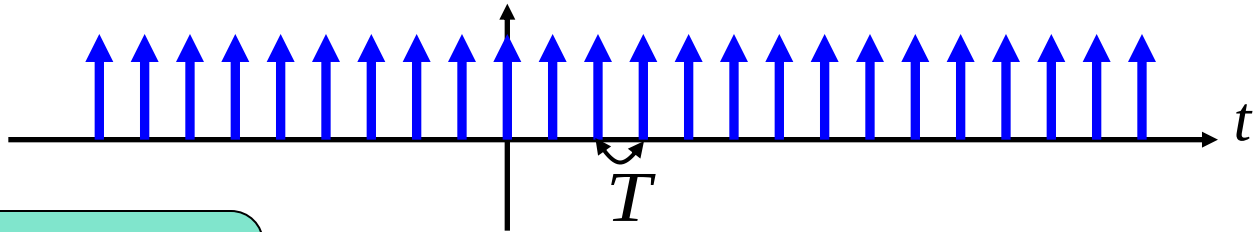
- ・デルタ関数の周期系列
- ・標本化定理(折り返し歪み・エイリアシング)
- ・補間関数
- ・2次元標本化定理

標本化

信号の標本化

標本化パルス系列

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$



標本化された信号

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t)$$

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$x_s(t) \quad (-\infty < t < \infty) \neq \{x(nT)\} \quad (-\infty < n < \infty, n \text{ は整数})$$

連続関数

数列

$$= x[n] \quad (-\infty < n < \infty, n \text{ は整数})$$

情報の世界

情報世界対象

数値
文字
図形
グラフ
木構造

実世界対象

人
自動車
犬
猫
不動産

対象

実世界

デジタル信号
 $x[n]$

量子化

標本化信号
 $x_s(t)$

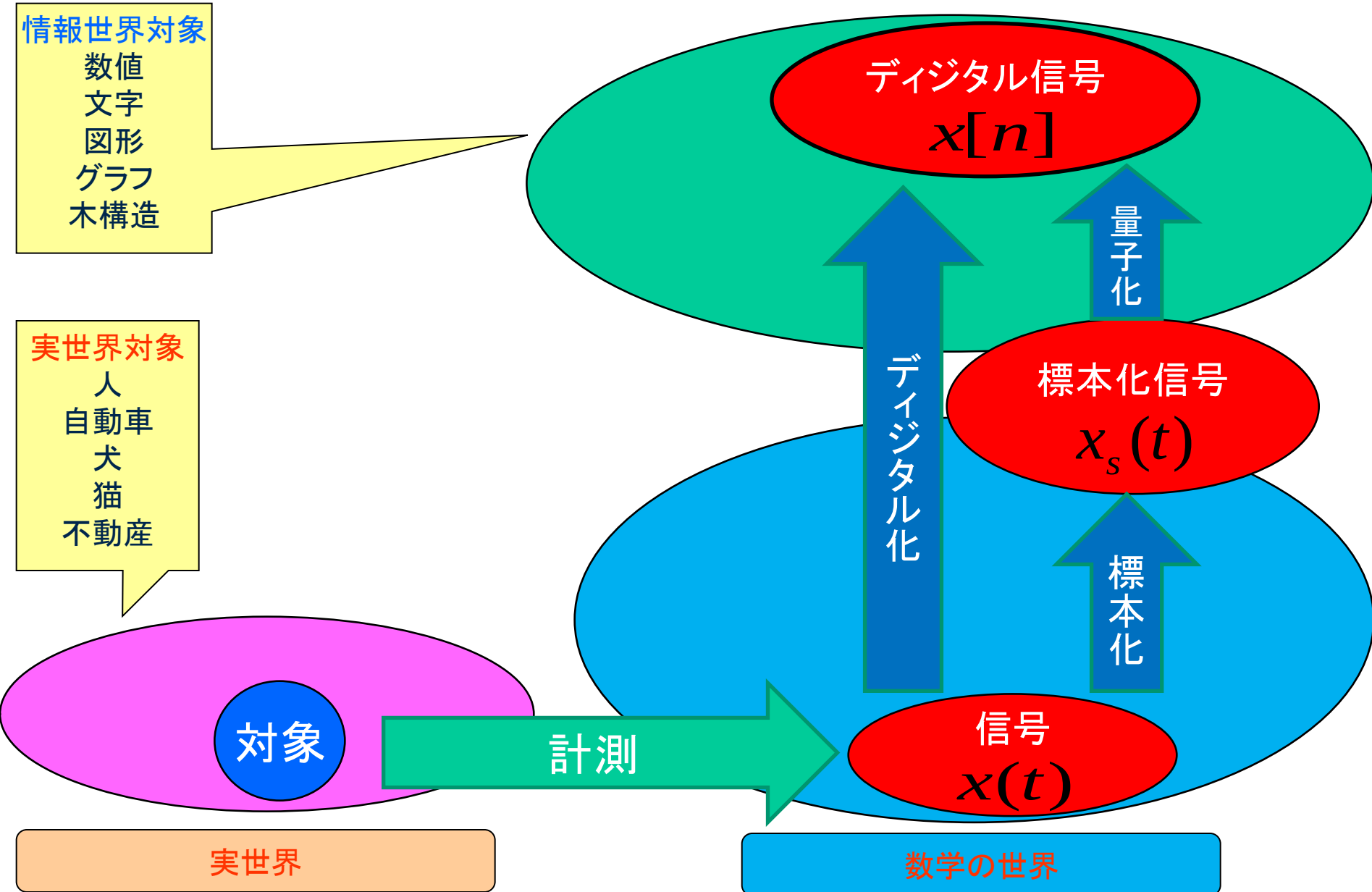
標本化

デジタル化

信号
 $x(t)$

計測

数学の世界



情報の世界

情報世界対象

数値
文字
図形
グラフ
木構造

実世界対象

人
自動車
犬
猫
不動産

対象

実世界

デジタル信号
 $x[n]$

量子化(符号化)

ディジタル

離散時間信号
 $x_c(t)$

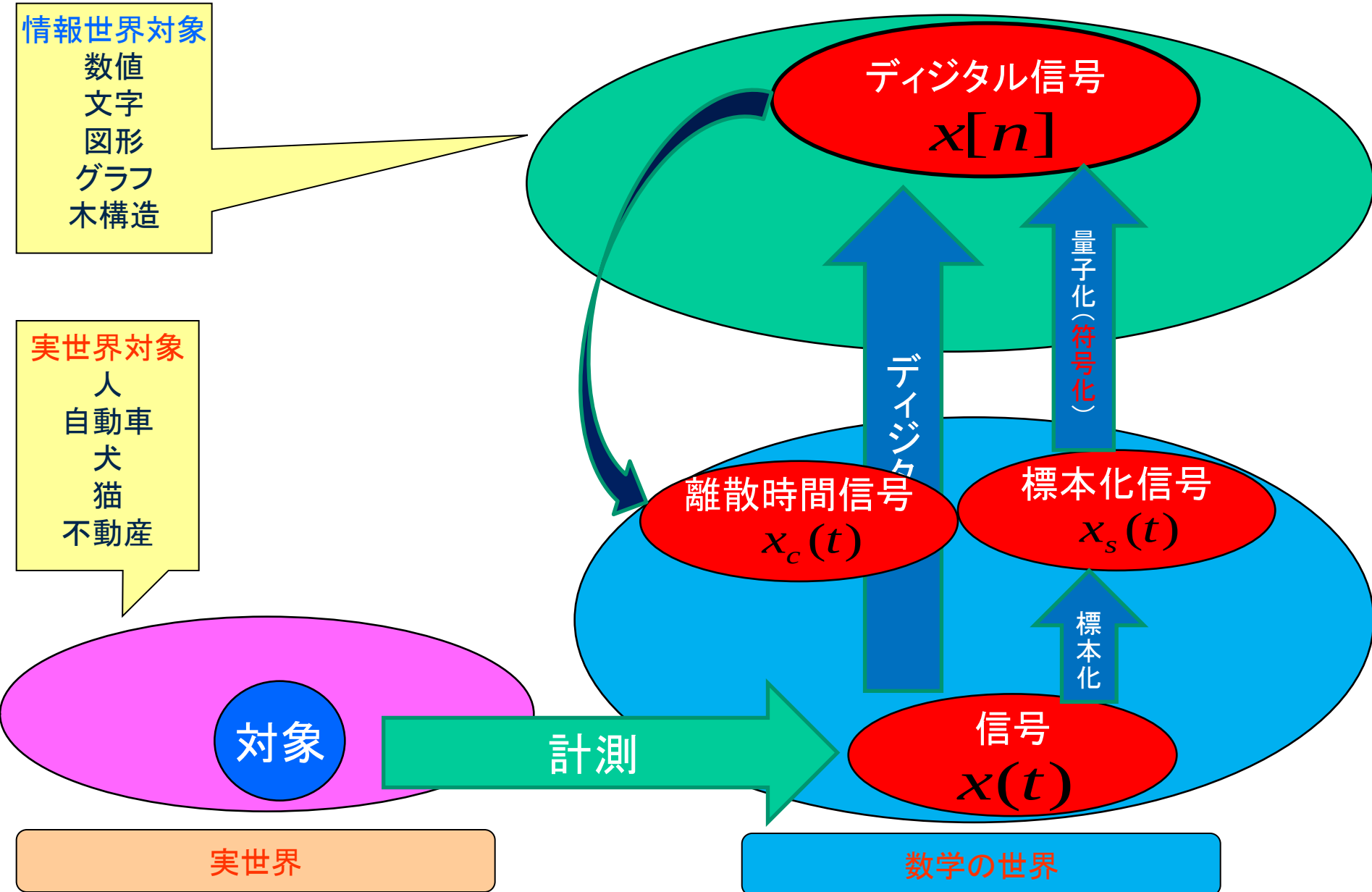
標本化信号
 $x_s(t)$

標本化

信号
 $x(t)$

計測

数学の世界



標本化された信号のフーリエ変換

標本化された信号

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t)$$

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \Delta_T(\omega)$$

標本化パルス系列のフーリエ変換

フーリエ級数展開

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t}$$

$$\omega_s = 2\pi/T$$

$$\Delta_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[e^{jn\omega_s t}]$$

$$= \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) = \omega_s \delta_{\omega_s}(\omega)$$

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} [\omega_s \delta_{\omega_s}(\omega) * X(\omega)]$$

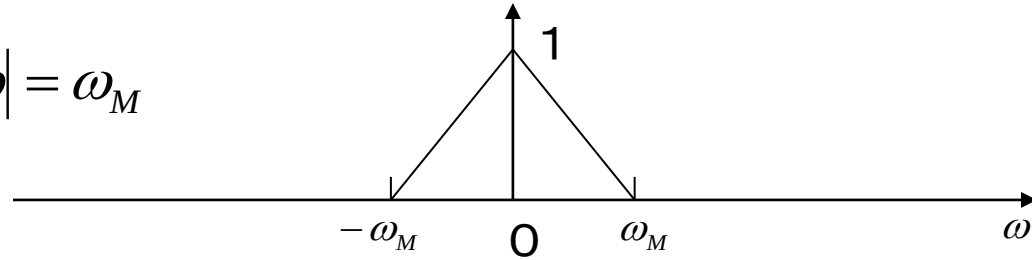
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(u - n\omega_s)] X(\omega - u) du$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)$$

標本化定理

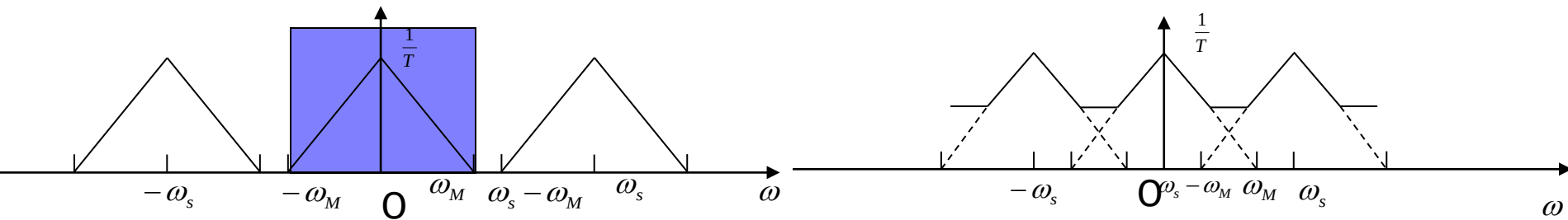
帯域制限信号

$$X(\omega) = 0 \quad |\omega| = \omega_M$$



標本化間隔Tで標本化

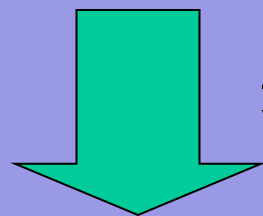
$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s) \quad \omega_s = 2\pi/T$$



$\omega_s \geq 2\omega_M$ の場合

$\omega_s < 2\omega_M$ の場合

$$X(\omega) = TX_s(\omega)P_{2\omega_M}(\omega)$$



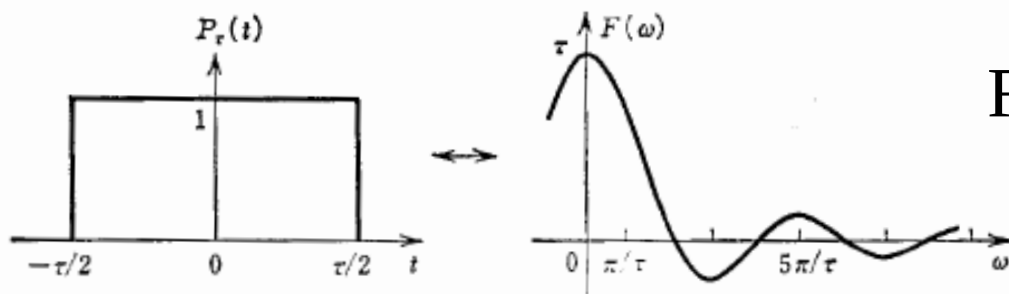
逆フーリエ変換

$x(t) = x_s(t)$ と $F^{-1}[TP_{2\omega_M}(\omega)]$ の畳み込み

$$P_\tau(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}(\omega\tau / 2)$$

$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ の時

$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$ なので、



$$F^{-1}[TP_{2\omega_M}(\omega)] = \frac{T\omega_M}{\pi} \text{Sa}(-\omega_M t)$$

図 2.2 フーリエ変換対 (方形波)

$\omega_s = 2\omega_M$ としたとき、 $T = 2\pi / \omega_s = \pi / \omega_M$ なので、

$$F^{-1}[TP_{2\omega_M}(\omega)] = \frac{T\omega_M}{\pi} Sa(-\omega_M t) = Sa(\omega_M t) = \frac{\sin \omega_M t}{\omega_M t}$$

$$x(t) = x_s(t) * Sa(\omega_M t) = \int_{-\infty}^{\infty} \{x(\alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\alpha - nT)\} Sa(\omega_M(t - \alpha)) d\alpha$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) Sa(\omega_M(t - \alpha)) \delta(\alpha - nT) d\alpha$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) Sa(\omega_M(t - nT))$$

教科書 3 2 ページ式(2.67)では

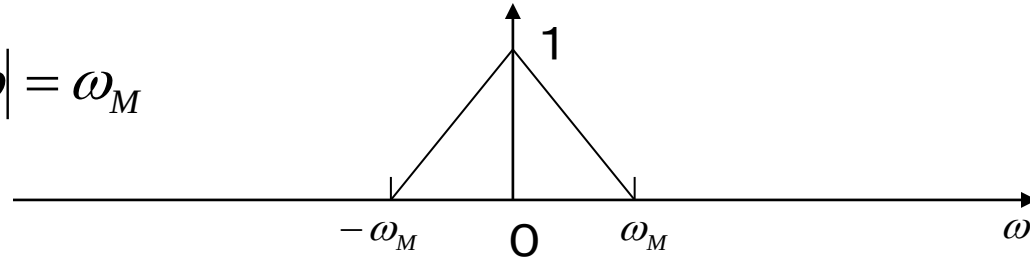
$$x(t) = x_s(t) * h(t) = x_s(t) * Sa(\omega_M t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \right] * \left[\frac{\sin \omega_M t}{\omega_M t} \right]$$

としており、 $x_s(t)$ がいつのまにか定義と異なったものになっている！

標本化定理

帯域制限信号

$$X(\omega) = 0 \quad |\omega| = \omega_M$$



$\omega_s \geq 2\omega_M$ のとき、

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin[\omega_M(t - nT)]}{\omega_M(t - nT)}$$

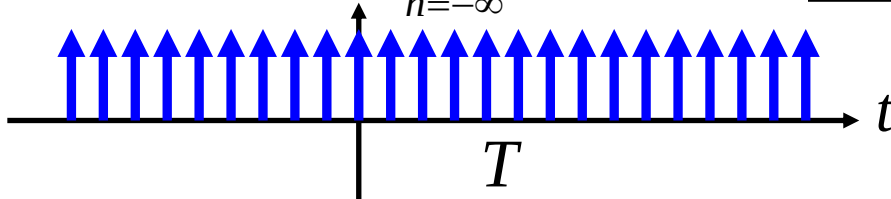
$$n\pi/\omega_M = nT \quad (n: \text{整数})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{Sa}(\omega_M(t - nT))$$

標本化された信号のフーリエ変換

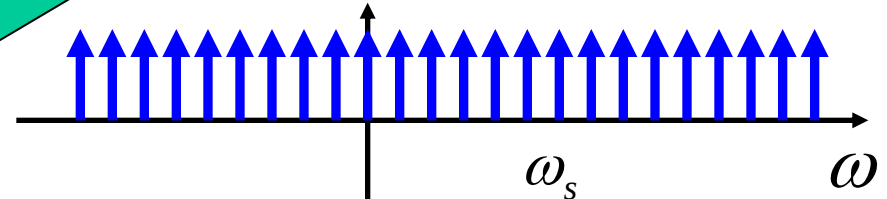
標本化パルス系列

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$



フーリエ変換

$$\Delta_T(\omega) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$



標本化された信号

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t)$$

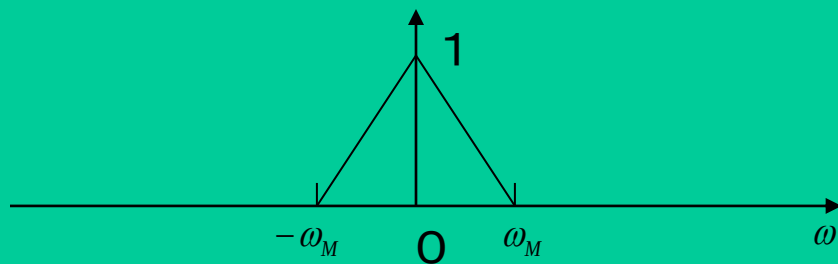
フーリエ変換と畳み込み

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega), \quad g(t) \leftrightarrow G(\omega)$$

$$\omega(t) = f(t) * g(t) \leftrightarrow W(\omega) = F(\omega)G(\omega)$$

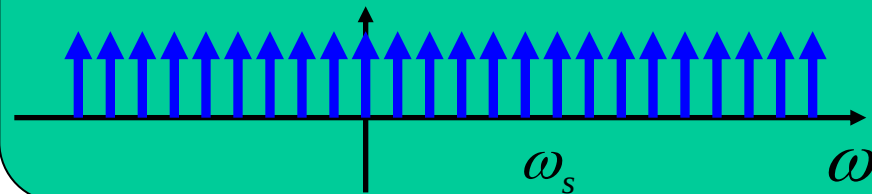
$$f(t)g(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u)G(\omega - u)du$$

畳み込み:
$$\int_{-\infty}^{\infty} F(u)G(\omega-u)du$$

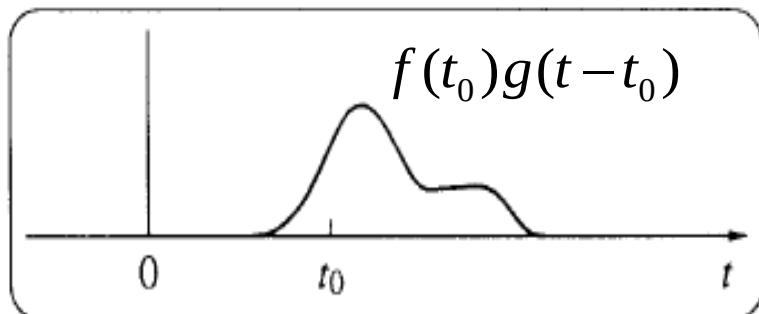


(a) フィルタ関数(インパルス応答)

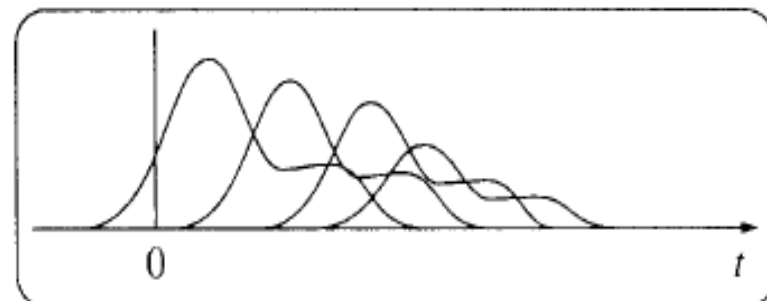
$$\Delta_T(\omega) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$



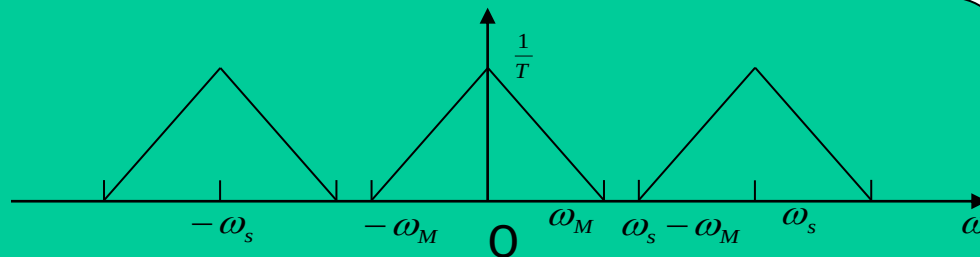
(b) 処理対象の信号



(c) フィルタ関数を t_0 平行移動して $f(t_0)$ 倍する



(d) t_0 を変化させたときの波形



$$\omega_s \geq 2\omega_M \text{ の場合}$$

(e) (d)の波形を全て重ね合わせて加算した信号

2次元信号の標本化

2次元フーリエ変換

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp \{-j(ux + vy)\} dx dy$$
$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \exp \{j(ux + vy)\} du dv$$

標本化格子: $\vec{r}_{mn} = m\vec{r}_1 + n\vec{r}_2$ ($\vec{r} = (x, y)$ $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

周波数領域の $\vec{\omega}_{pq} = p\vec{\omega}_1 + q\vec{\omega}_2$ ($\vec{\omega} = (u, v)$ $p, q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

双対格子: 但し

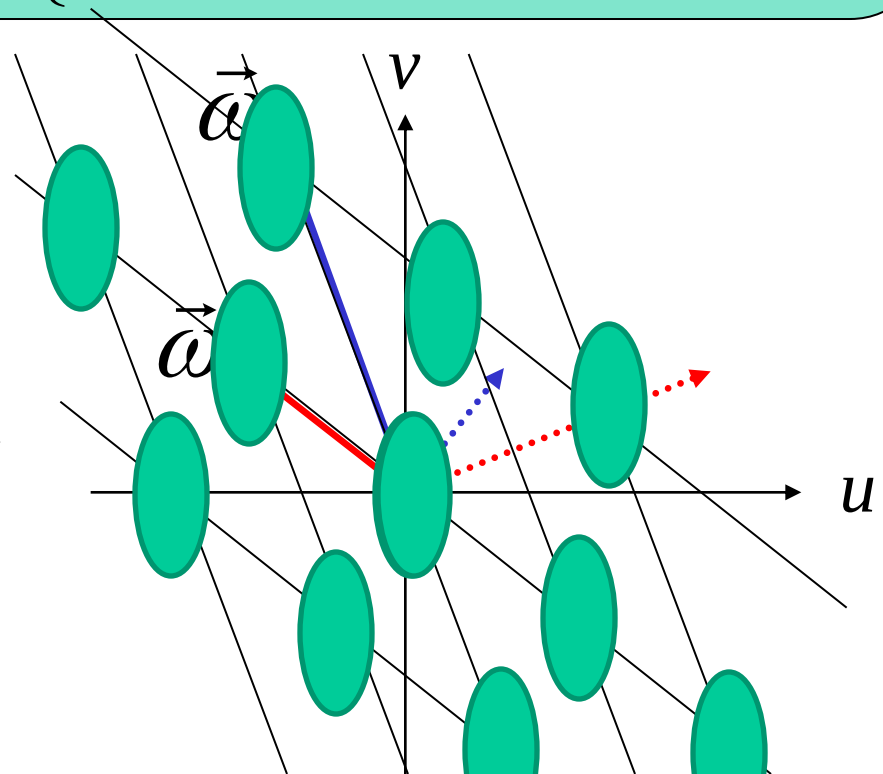
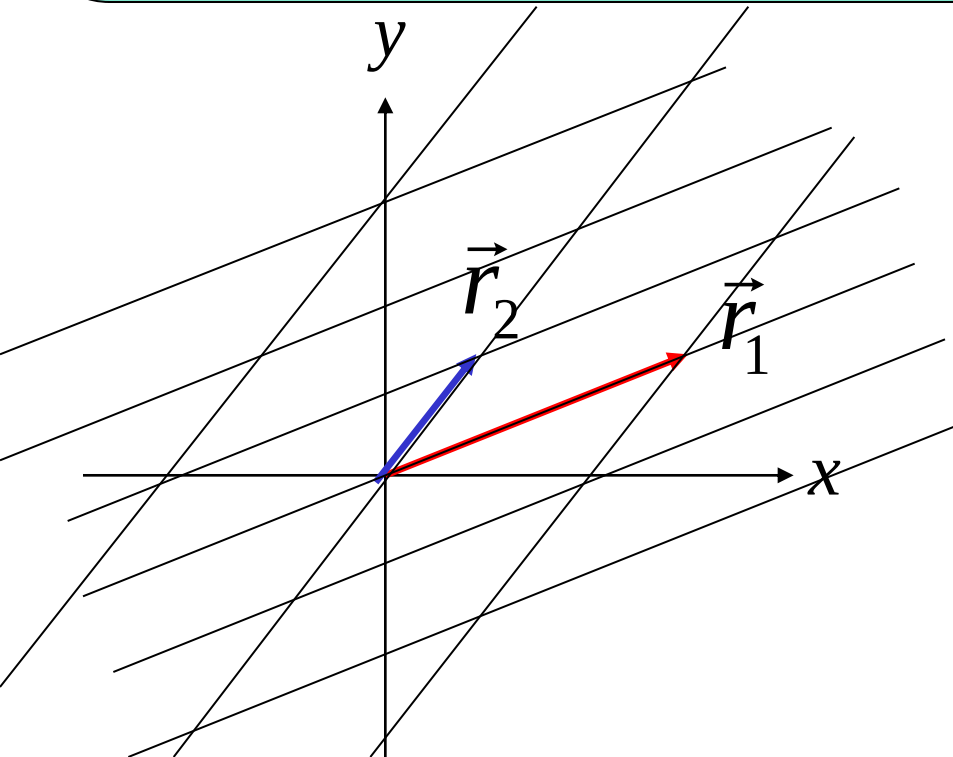
$$\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

標本化格子: $\vec{r}_{mn} = m\vec{r}_1 + n\vec{r}_2$ ($\vec{r} = (x, y)$ $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

周波数領域の $\vec{\omega}_{pq} = p\vec{\omega}_1 + q\vec{\omega}_2$ ($\vec{\omega} = (u, v)$ $p, q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

双対格子: 但し

$$\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$



2次元信号の標本化定理

1次元信号の場合

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)$$

2次元信号の場合

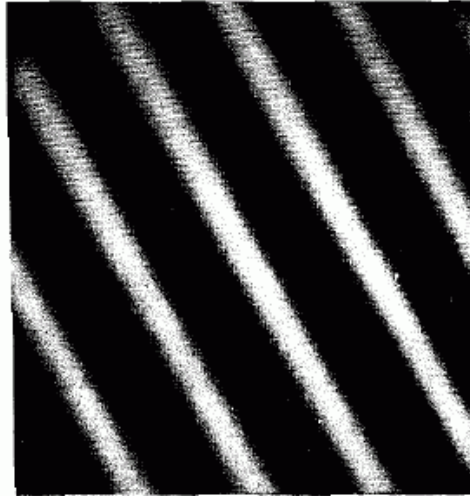
$$f_s(\vec{r}) = f(\vec{r}) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{mn})$$

$$F_s(\vec{\omega}) = \frac{1}{A} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} F(\vec{\omega} - \vec{\omega}_{pq})$$

A : $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ で作られる平行四辺形の面積

2次元信号の標本化

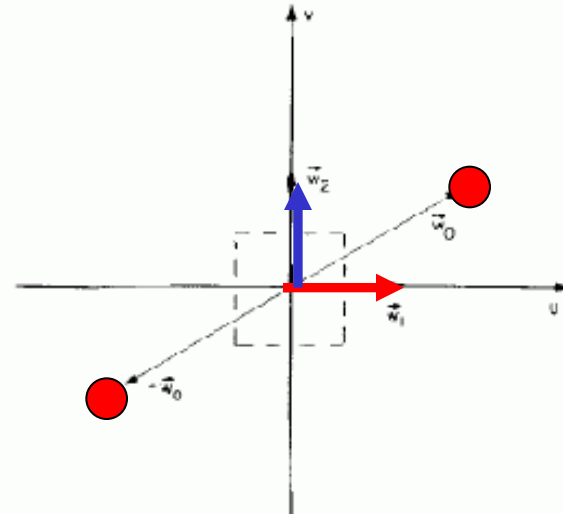
$$f(\vec{r}) = \cos 2\pi(\vec{w}_0 \cdot \vec{r})$$



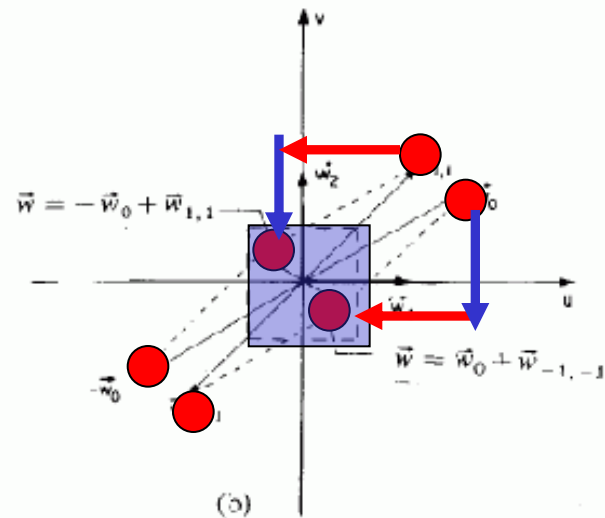
$$\cos 2\pi[(\vec{w}_0 - \vec{w}_{1,1}) \cdot \vec{r}]$$



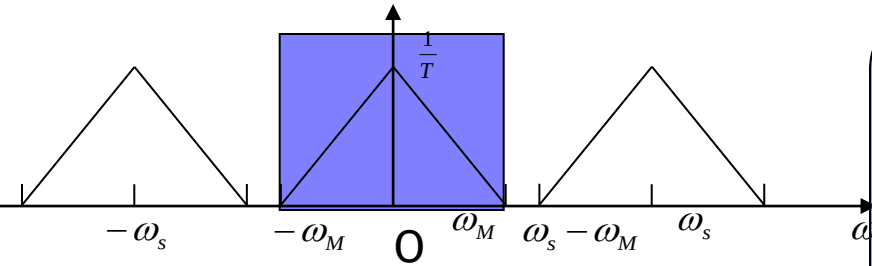
$$F(\vec{w}) = \frac{1}{2}[\delta(\vec{w} - \vec{w}_0) + \delta(\vec{w} + \vec{w}_0)]$$



$$\frac{1}{2}[\delta(\vec{w} - (\vec{w}_0 + \vec{w}_{-1,-1})) + \delta(\vec{w} + (\vec{w}_0 - \vec{w}_{1,1}))]$$

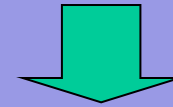


標本化定理の意味



$\omega_s \geq 2\omega_M$ の場合

$$X(\omega) = TX_s(\omega)P_{\omega_M}(\omega)$$



逆フーリエ変換

$x(t) = x_s(t)$ と $F^{-1}[TP_{\omega_M}(\omega)]$ の畳込み

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin[\omega_M(t - nT)]}{\omega_M(t - nT)} & n\pi/\omega_M = nT \quad (n: \text{整数}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{Sa}(\omega_M(t - nT)) \end{aligned}$$

つまり、

標本化された信号 $x_s(t)$ と $\text{Sa}(\omega_M t)$ を畳み込むことによって $t = nT$ 以外の任意の t における $x(t)$ の値が求められる。

これは、離散信号の補間と見なすことができる。

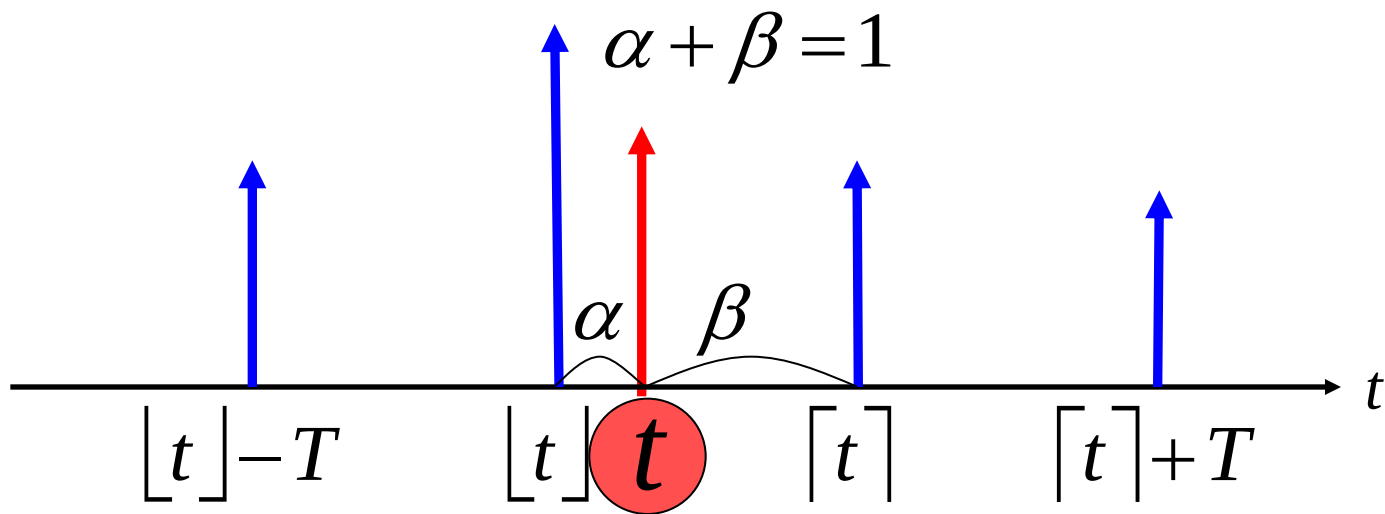
離散信号の補間法(I)

1. 最近傍補間

$$\hat{x}(t) = x(\langle t \rangle) \quad \langle t \rangle = \begin{cases} \lfloor t \rfloor & \alpha \leq \beta \text{ のとき} \\ \lceil t \rceil & \alpha > \beta \text{ のとき} \end{cases}$$

2. 線形補間

$$\hat{x}(t) = \beta x(\lfloor t \rfloor) + \alpha x(\lceil t \rceil)$$



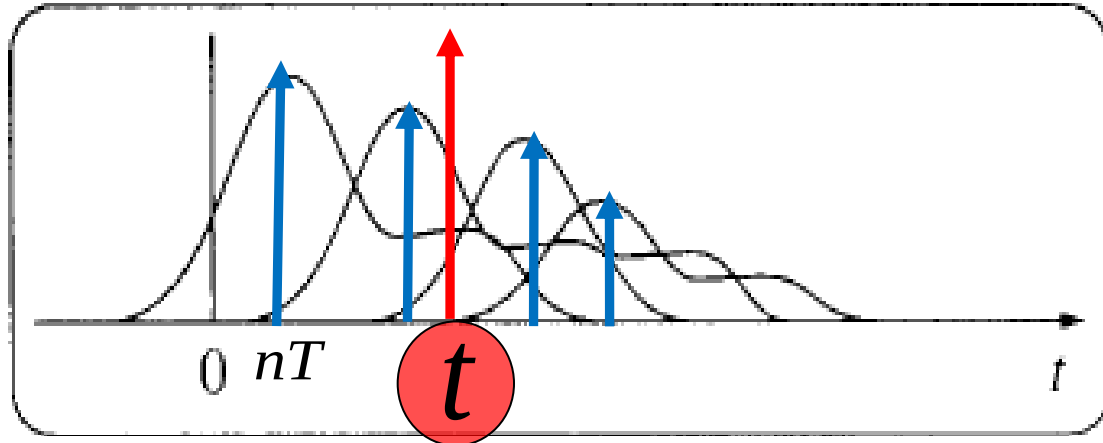
離散信号の補間法(II)

3. 3次多項式補間

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)C(t-nT) \quad C(t) = \begin{cases} 1-2|t|^2+|t|^3 & (0 \leq |t| < 1) \\ 4-8|t|+5|t|^2-|t|^3 & (1 \leq |t| < 2) \\ 0 & (2 \leq |t|) \end{cases}$$

4. 標本化定理

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin[\omega_M(t-nT)]}{\omega_M(t-nT)} \quad n\pi/\omega_M = nT \quad (n: \text{整数})$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{Sa}(\omega_M(t-nT))$$



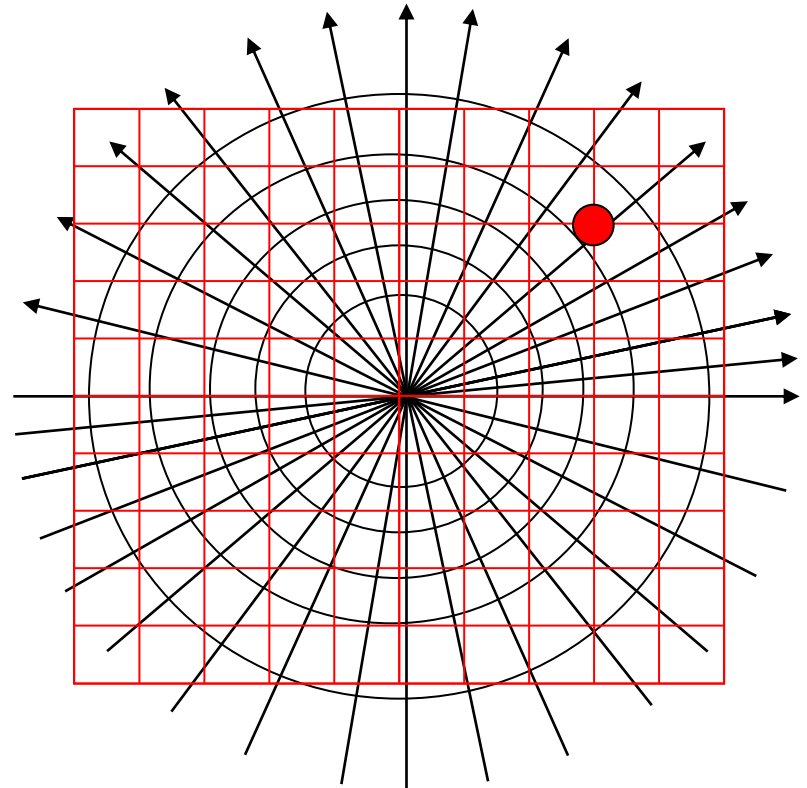
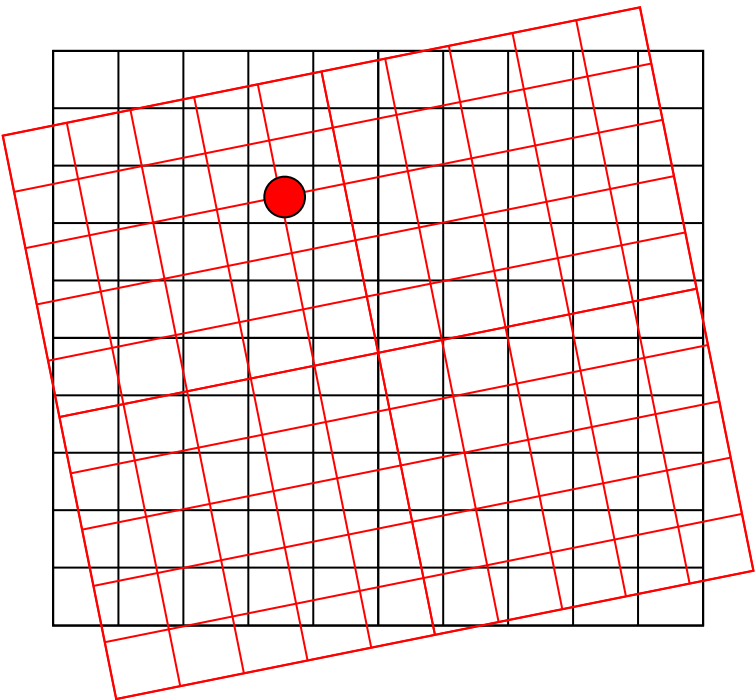
課題18

補間関数 $C(t)$ は $Sa(t)$ の近似関数であるが、
両者の誤差関数を描きなさい。

また、 $x(t) = \sin \omega_0 t$ を標本化周波数 ω_s で標本化した
関数 $x_s(t)$ から最近傍補間、線形補間、3次多項式
補間、標本化定理で元の関数 $x(t)$ の復元結果 $\hat{x}(t)$ を
それぞれ計算で求め、 $x(t)$ との誤差を描きなさい。
計算においては、 ω_0 、 ω_s の値をいろいろ変えて
行いなさい。

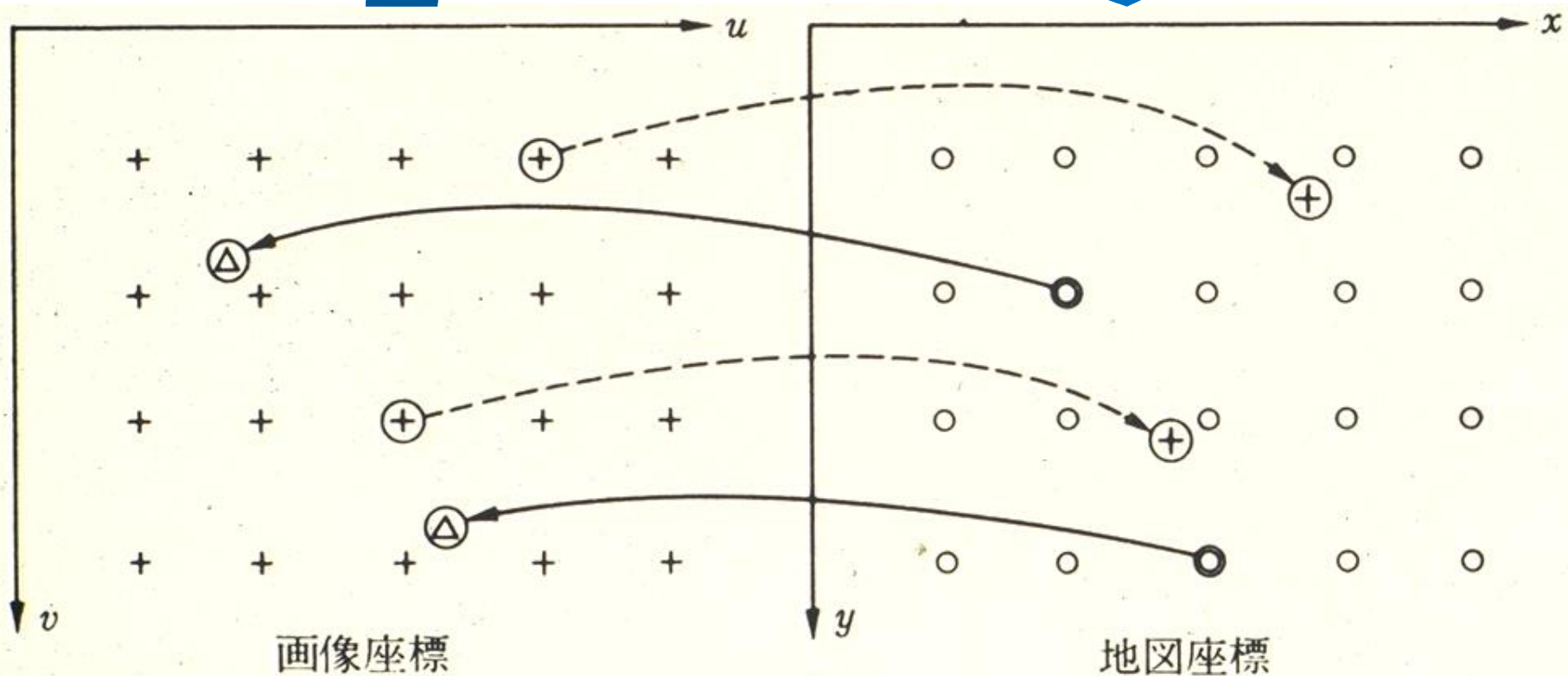
補間が必要となる処理

- サンプリング周波数の変換
 - Downsampling: サンプリング周波数を下げる
 - Upsampling: サンプリング周波数を上げる
- 画像の拡大縮小・回転・座標系の変換



画像の幾何学的変換・補正

幾何学的変換



計算



原画像（白枠の部分拡大）



最近傍補間



線形補間

課題19

1. ホームページにある音データに対して、
1/2のdownsamplingおよび2倍のupsamplingを行ったものを
そのまま音として聞くとどのようになるかを調べなさい。
(音再生ソフトは再生する音データのサンプリング周波数が
固定あるいは可変になっている。)
2. 通常のNTSC規格のビデオ映像(640x480画素)を
ハイビジョンテレビ(1920×1080画素)で映す場合および
その逆の場合には、どのような処理をすればよいか
考えなさい。