

【第一話】 信号処理の基礎理論



【第二話】 実世界における信号処理

- (1) 信号の周波数特性の時間的变化の分析
 - a. 短時間フーリエ変換
 - b. ウェーブレット変換
 - c. 多重解像度解析
- (2) 相関関数を使った信号・画像処理
- (3) 信号の統計的分析
 - a. 主成分分析
- (4) マルチメディア信号の符号化
 - a. 音声信号の符号化
 - b. 画像の符号化
 - c. ビデオの符号化

フーリエ変換(大域的信号解析)

アナログ信号

- ・フーリエ変換とラプラス変換
- ・デルタ関数の導入によるフーリエ変換の拡張
- ・2次元フーリエ変換(2次元周波数)
- ・畳み込み演算、相関関数
- ・CTの原理(1次元フーリエ変換と2次元フーリエ変換の関係)

標本化

- ・デルタ関数の周期系列
- ・標本化定理(折り返し歪み・エイリアシング)
- ・2次元標本化定理

離散フーリエ変換

- ・離散フーリエ変換の基本定理
- ・2次元離散フーリエ変換
- ・FFTアルゴリズム(時間間引き、周波数間引き、2次元FFT)
- ・離散フーリエ変換の行列表現→直交変換
- ・離散コサイン変換

信号の時間周波数解析(局所的信号解析)

窓関数

- ・有限波形の切り出しと両端での周期性の調整
- ・ハニング窓、ハミング窓
- ・ガウス関数とフーリエ変換

短時間フーリエ変換

- ・非定常信号のスペクトル(変化)分析
- ・サウンドスペクトログラム
- ・Gabor変換

ウェーブレット変換

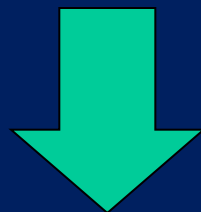
- ・局所的スペクトルの分析
- ・Gaborウェーブレット
- ・信号の最小単位
- ・離散ウェーブレット変換

多重解像度解析

- ・大局的構造と局所的構造
- ・零交差とスケール・スペース

短時間フーリエ変換 プリント

直交変換：周波数分解

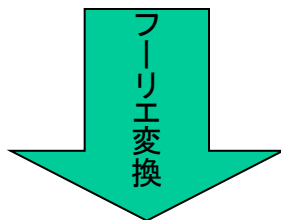


時間分解

短時間フーリエ変換

窓関数

$$\hat{f}(t) = f(t)w(t) \quad (5.51)$$



$$\begin{aligned} \hat{F}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)w(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} w(t)e^{-j\omega t} f(t) dt \end{aligned}$$

短時間フーリエ変換

窓の位置をずらしながらフーリエ変換をする

$$\hat{F}(b, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t-b)e^{-j\omega t} f(t) dt \quad (1.18)$$

プリント

【復習】ガウス関数とフーリエ変換

ガウス関数

$$g(x) = e^{-x^2}$$

正規化されたガウス関数（正規分布関数）

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1$$

N次元正規分布関数

$$g(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{m})^t \Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{m})}$$

プリント参照

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad \text{より}$$

ガウス関数のフーリエ変換
【課題10】これを証明しなさい。

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \leftrightarrow e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}}$$

Gabor変換

窓関数として正規化ガウス関数を用いた短時間フーリエ変換

正規化されたガウス関数（正規分布関数）

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1$$

$$\hat{F}(b, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-b)^2}{4\sigma^2}} e^{-j\omega t} f(t) dt \quad (1.17)$$

Gabor変換

$$\hat{F}(b, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-b)^2}{4\sigma^2}} e^{-j\omega t} f(t) dt$$

ガウス関数を窓関数として、
部分波形を切り出して
フーリエ変換

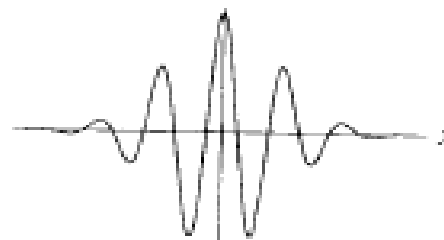
ウェーブレット変換への展開

$$\psi(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{4\sigma^2}} e^{-jt} \quad \text{として}$$

周波数 ω とは独立
後にパラメータとして ω を追加

$$(W_{\varphi} f)(b, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \bar{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right) f(x) dx$$

ウェーブレット



相関

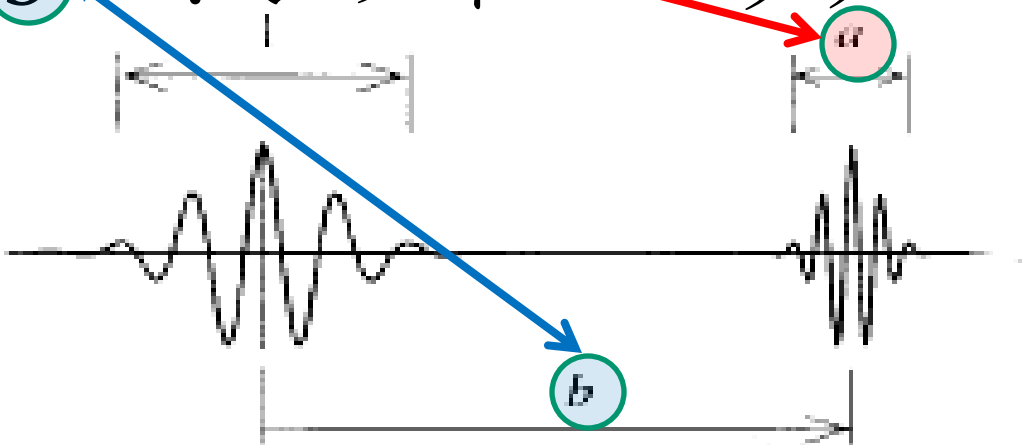
ウェーブレット変換

$$(W_{\varphi} f)(b, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \bar{\varphi}\left(\frac{x-b}{a}\right) f(x) dx \quad (1.1)$$

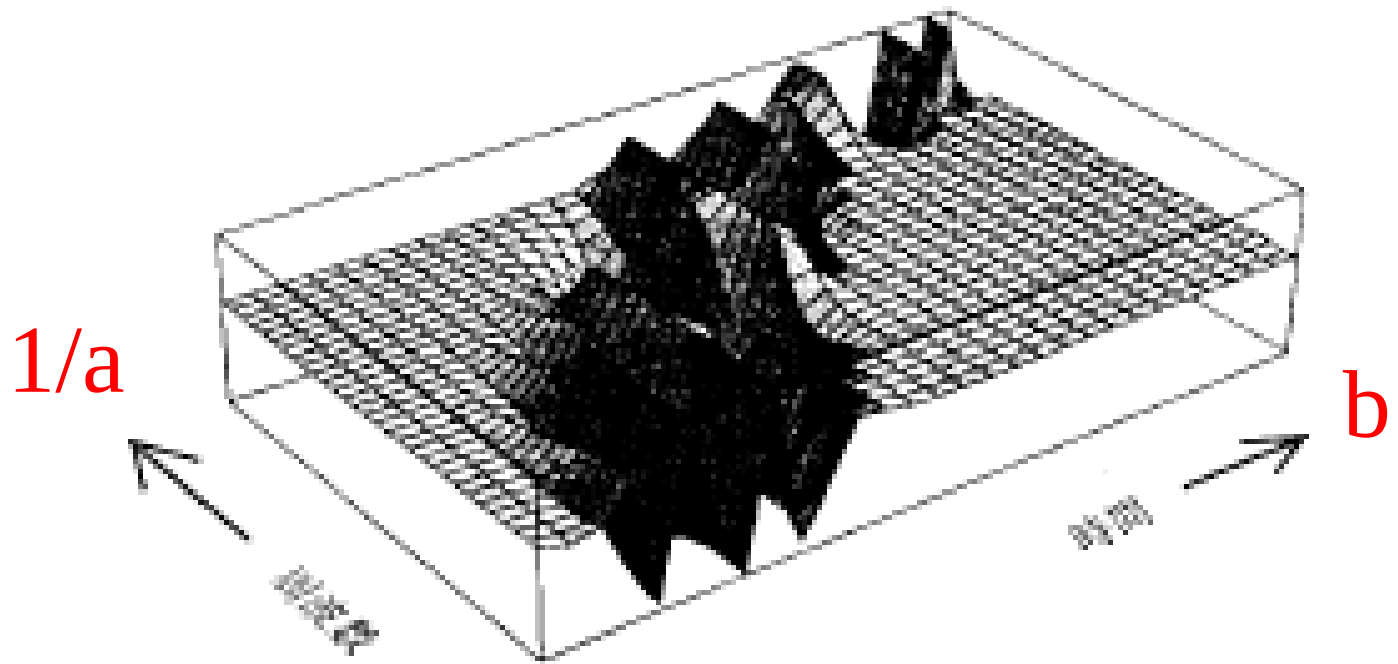
$\varphi(x)$: マザー・ウェーブレット

a : スケール・パラメータ

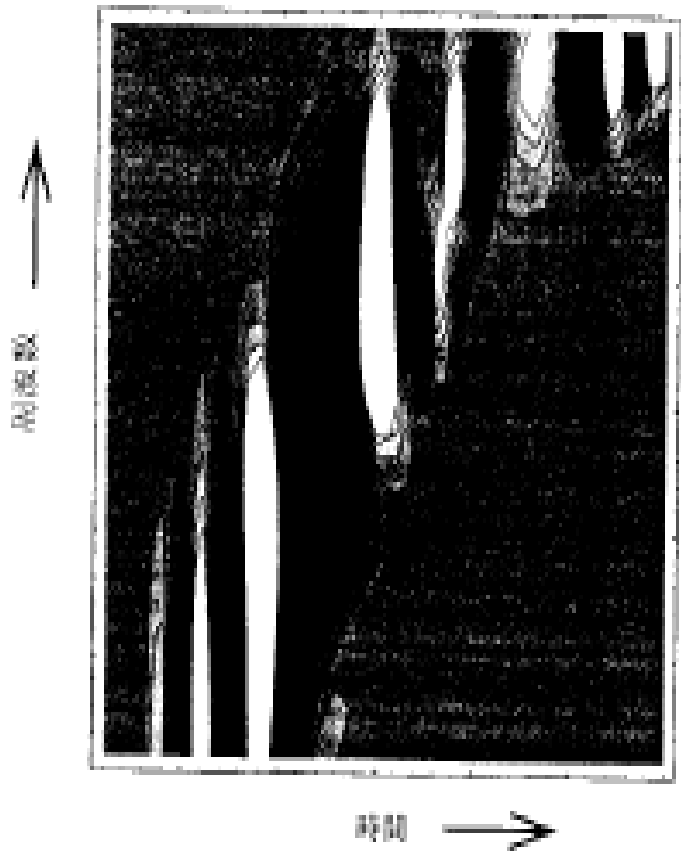
b : シフト・パラメータ



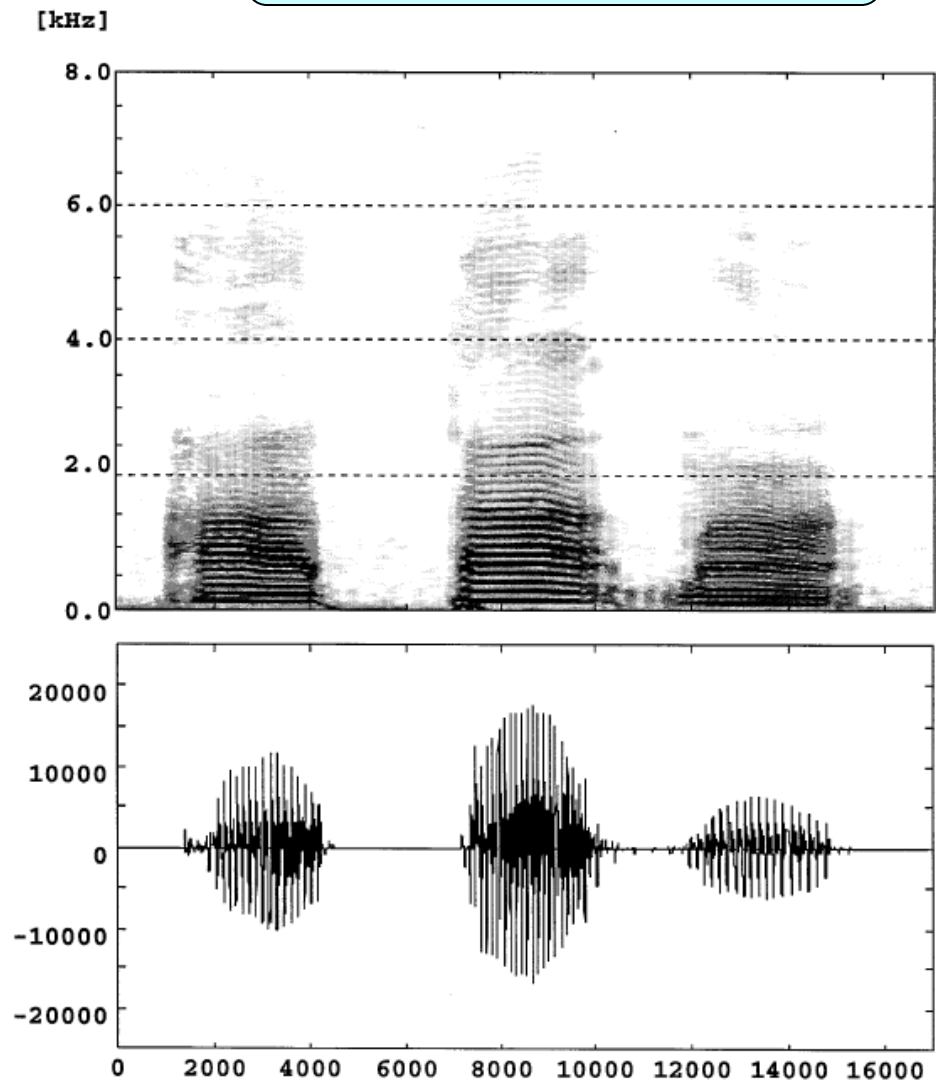
ウェーブレット変換の結果 時間周波数解析



ウェーブレット変換の結果



サウンド・スペクトログラム



ガボールウェーブレット変換

ω は変数ではなくパラメータ

ガボールウェーブレット $\psi(t) =$ ガウス関数 $g_\sigma(t) \times$ 周期信号 $e^{j\omega t}$

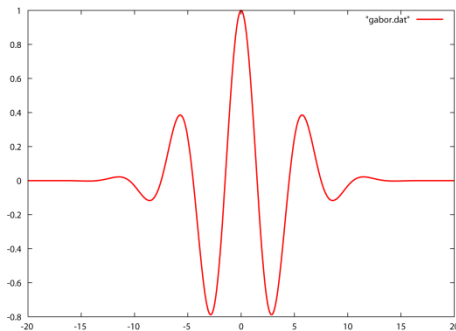
$$\psi(t) = g_\sigma(t) \left(e^{j\omega t} - e^{-(\sigma\omega)^2} \right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

とするための直流分補正項

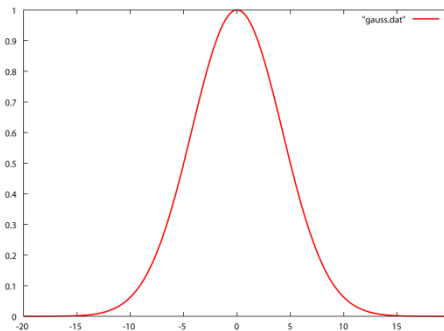
【演習課題36】

これを確認しなさい。



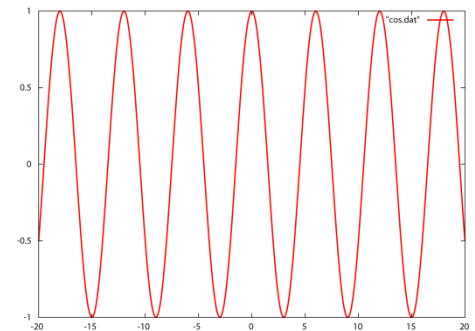
ψ の実部

=



g_σ

×



$e^{j\omega}$ の実部 (cos)

2次元ガボールウェーブレット変換

画像のテクスチャの変化の方向性と周波数成分を解析

脳の第1視覚野の処理の近似

顔認識のための特徴量抽出などに利用

2次元ガボールウェーブレット

$$a^{-m} \psi \left(\frac{\dot{x} - x_0}{a^m}, \frac{\dot{y} - y_0}{a^m} \right)$$

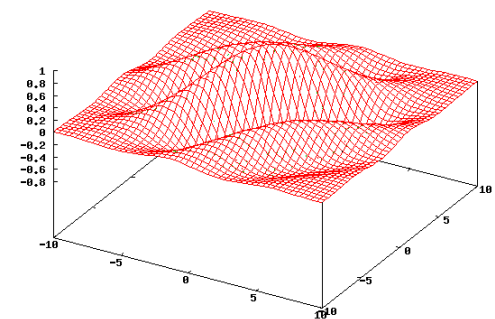
$$\psi(\dot{x}, \dot{y}) = g_{\sigma}(\dot{x}, \dot{y}) \left(e^{j\omega\dot{x}} - e^{(\omega\sigma)^2} \right)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ウェーブレット
の方向を定める

$$\theta = 0$$

$$\theta = \pi / 4$$



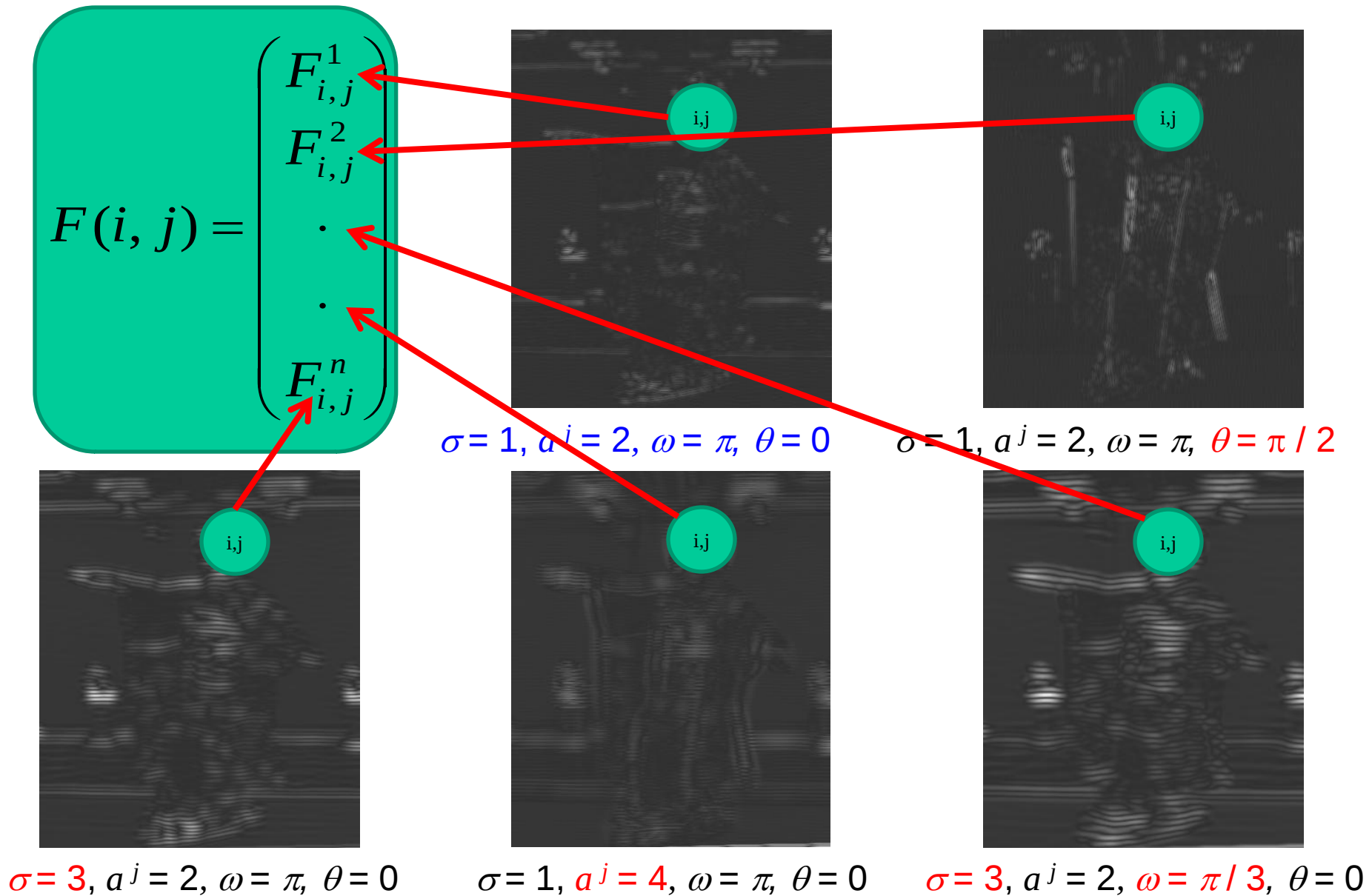
$$\theta = \pi / 2$$

$$\theta = 3\pi / 4$$

a^m : スケール・パラメータ
 θ : 回転・パラメータ
 x_0, y_0 : シフト・パラメータ

$$g_{\sigma}(\dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^2 \sigma_x \sigma_y} \exp \left(-\frac{\dot{x}^2}{4\sigma_x^2} - \frac{\dot{y}^2}{4\sigma_y^2} \right)$$

2次元ガボールウェーブレット変換による画像特徴抽出



信号の時間周波数解析(局所的信号解析)

窓関数

- ・有限波形の切り出しと両端での周期性の調整
- ・ハニング窓、ハミング窓
- ・ガウス関数とフーリエ変換

短時間フーリエ変換

- ・非定常信号のスペクトル(変化)分析
- ・サウンドスペクトログラム
- ・Gabor変換

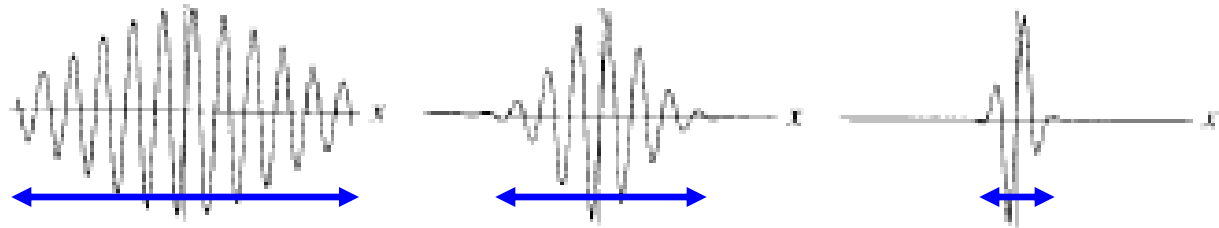
ウェーブレット変換

- ・局所的スペクトルの分析
- ・Gaborウェーブレット
- ・信号の最小単位
- ・離散ウェーブレット変換

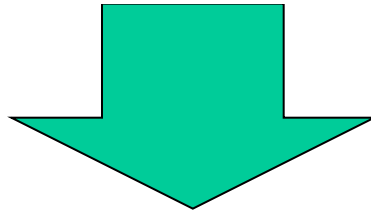
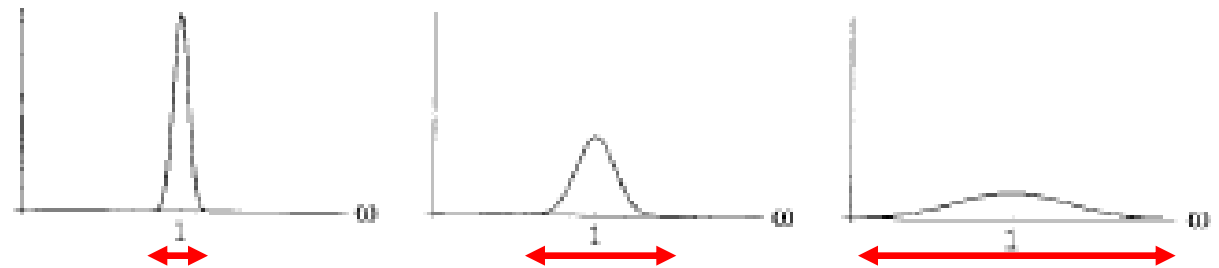
信号の最小単位

$$\hat{F}(b, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-b)^2}{4\sigma^2}} e^{-j\omega t} f(t) dt \quad (1.17)$$

時間窓の幅



周波数
スペクトルの幅



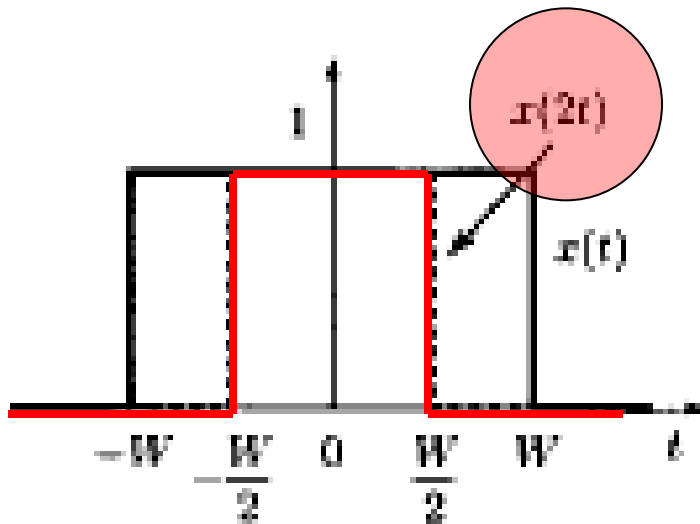
ガウス関数のフーリエ変換

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \leftrightarrow e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$$

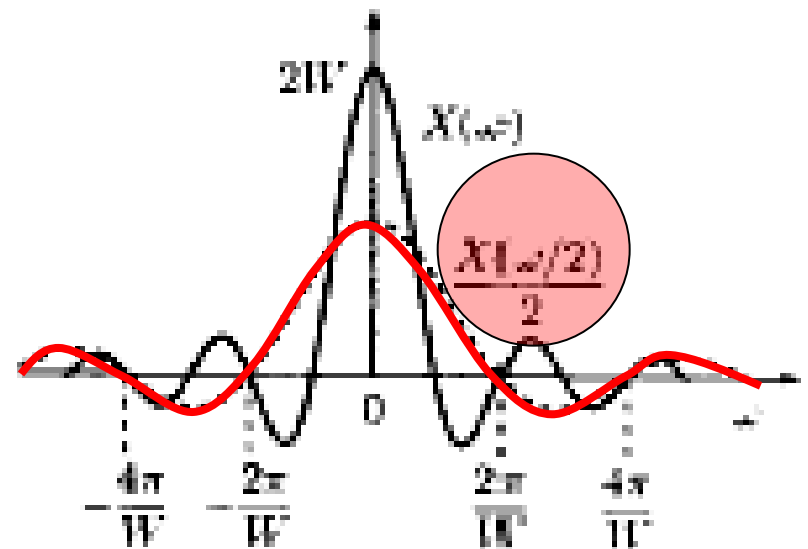
信号の最小単位

$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ のとき、
フーリエ変換の相似性

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (a \neq 0)$$



(a) 時間領域



(b) 周波数領域

図 3.24 時間制限信号 $x(t)$ と周波数スペクトル $X(\omega)$

時間・周波数の不確定性関係

信号 $f(x)$ の平均値

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x |f(x)|^2 dx}{\|f\|^2}$$

信号 $f(x)$ の幅

$$\Delta_f^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 |f(x)|^2 dx}{\|f\|^2}$$

フーリエ変換 $F(\omega)$ の平均値

$$\bar{\omega} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega |F(\omega)|^2 d\omega}{\|F\|^2}$$

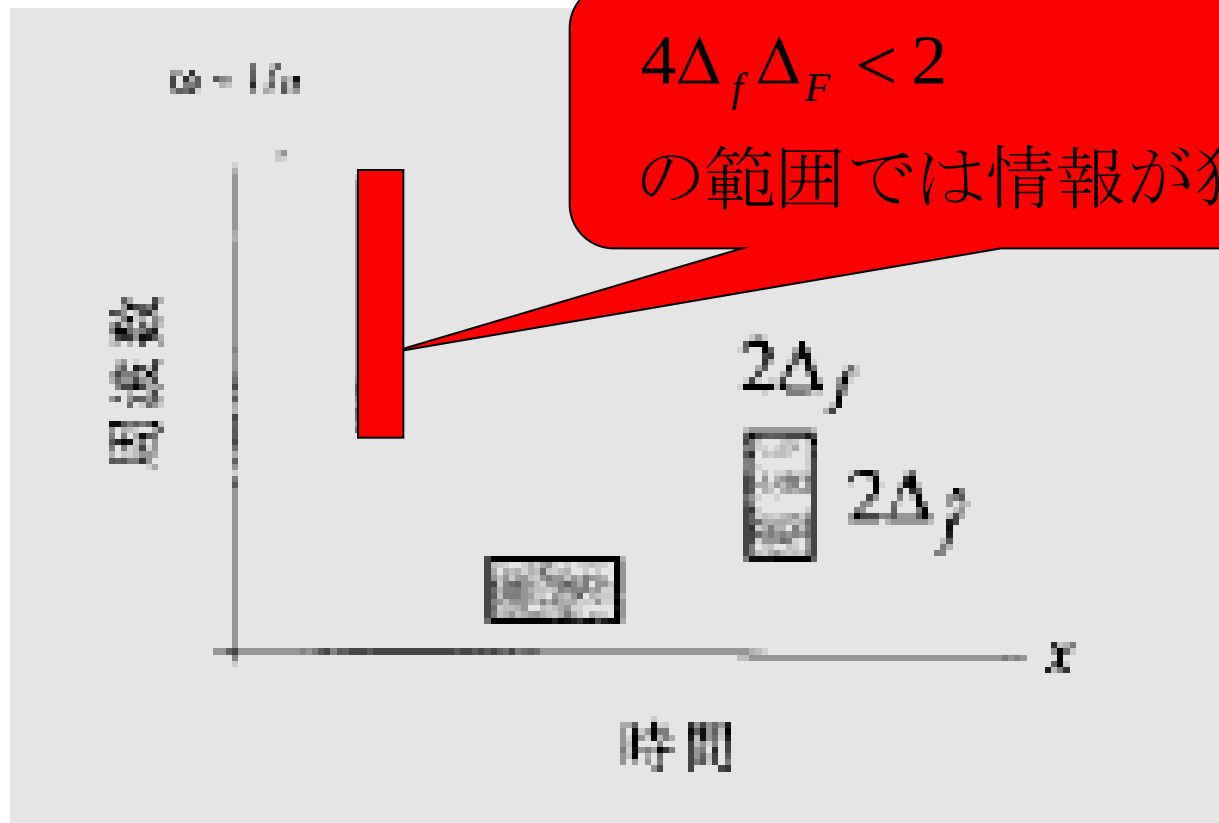
フーリエ変換 $F(\omega)$ の幅

$$\Delta_F^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \bar{\omega})^2 |F(\omega)|^2 d\omega}{\|F\|^2}$$

時間・周波数の不確定性

$$\Delta_f \Delta_F \geq \frac{1}{2}$$

時間・周波数の不確定性関係



離散ウェーブレット変換

$(b', 1/a')$ と $(b, 1/a)$ が信号の最小単位領域内にあると
 $(W_\varphi f)(b', a')$ と $(W_\varphi f)(b, a)$ は独立とは言えない。

同一の最小単位領域に属さないような $(b, 1/a)$ の組を選び、それらに対する $(W_\varphi f)(b, a)$ を列挙すればよい。

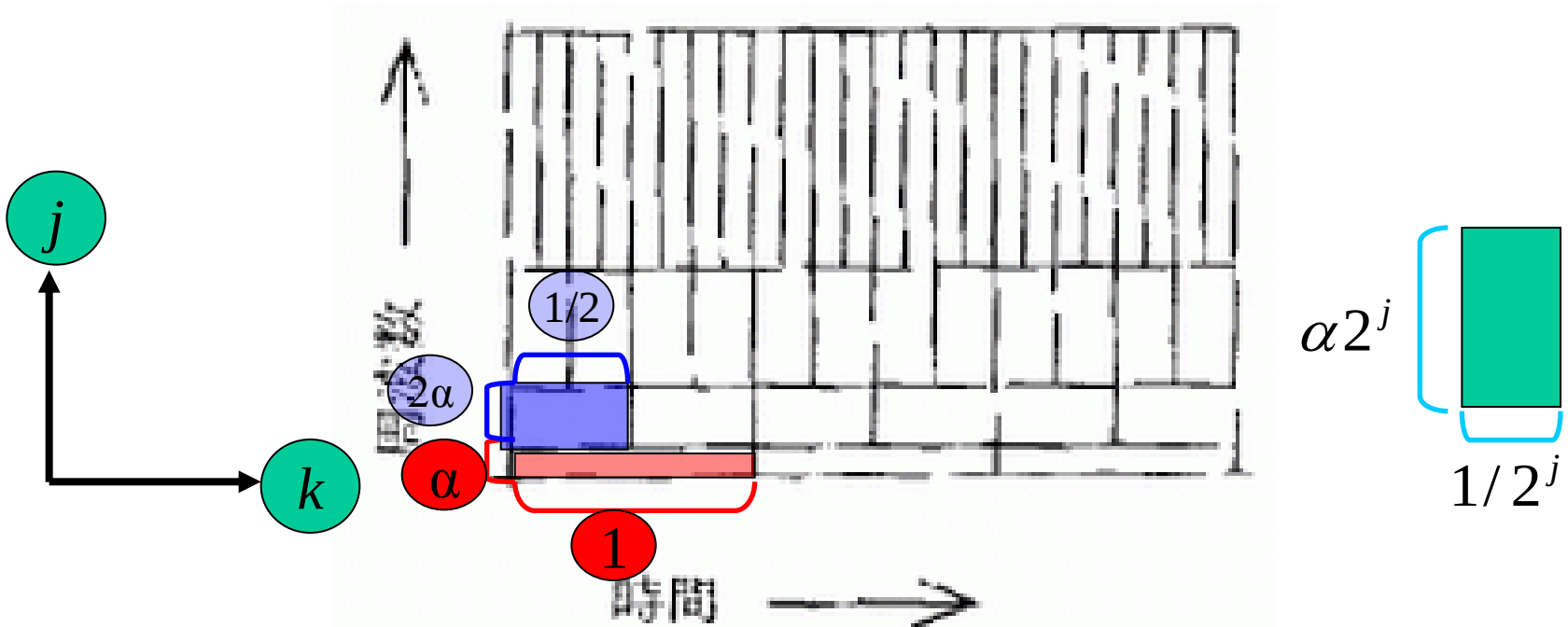
離散ウェーブレット変換

j, k : 整数

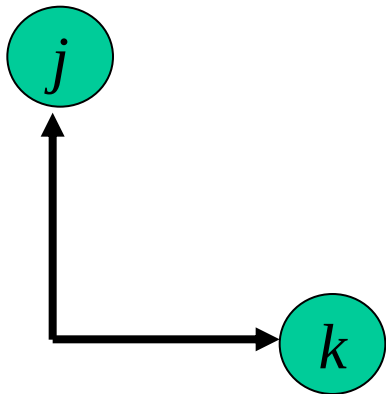
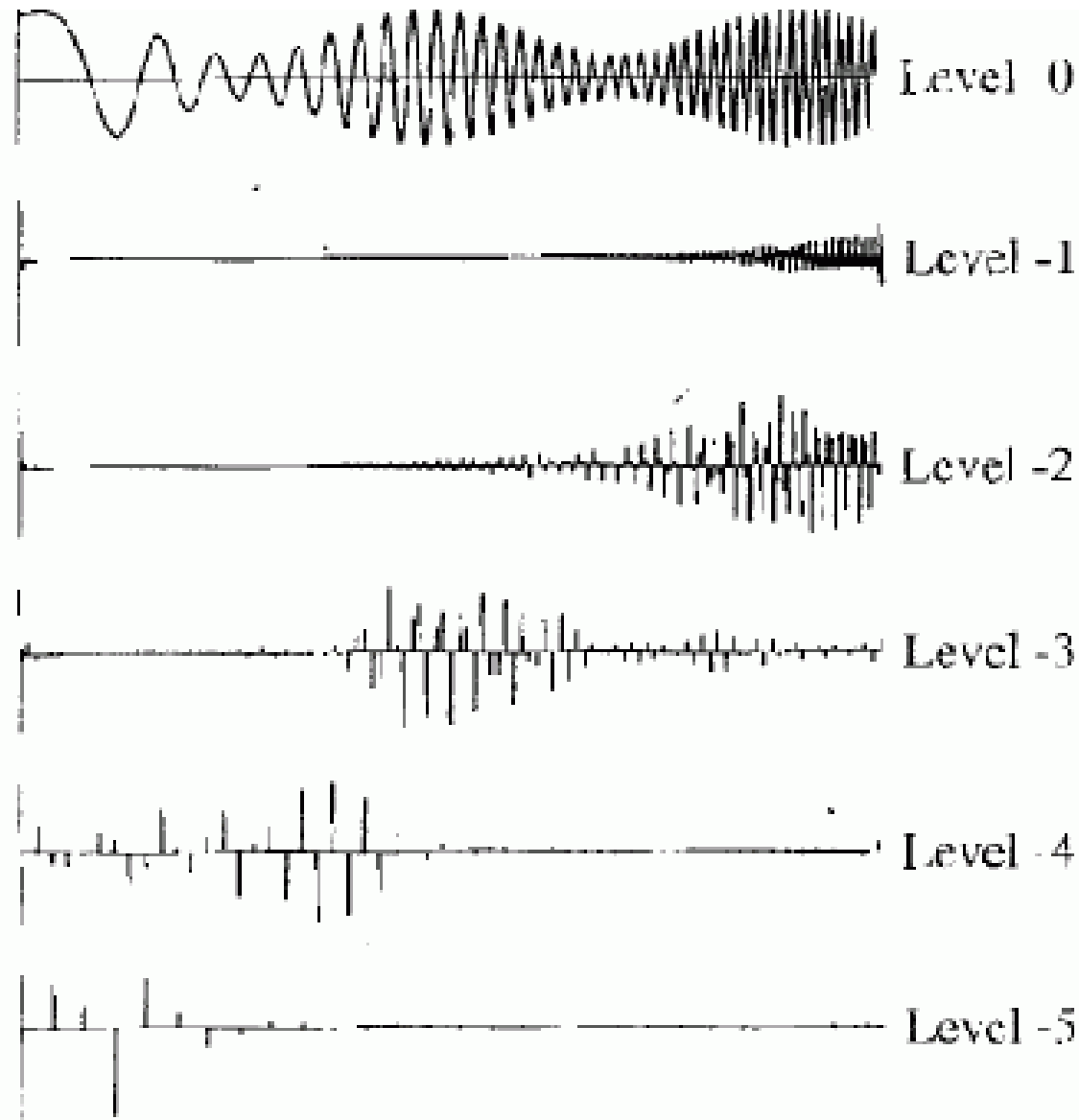
$(b, 1/a) = (2^{-j} k, 2^j)$ として b, a を離散化

$$(W_\varphi f)(b, a) = (W_\varphi f)(2^{-j} k, 2^{-j}) = d_k^{(j)}$$

$$d_k^{(j)} = \sqrt{2^j} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(2^j x - k) f(x) dx \quad (1.7)$$



離散ウェーブレット変換の結果



信号の時間周波数解析(局所的信号解析)

窓関数

- ・有限波形の切り出しと両端での周期性の調整
- ・ハニング窓、ハミング窓
- ・ガウス関数とフーリエ変換

短時間フーリエ変換

- ・非定常信号のスペクトル(変化)分析
- ・サウンドスペクトログラム
- ・Gabor変換

ウェーブレット変換

- ・局所的スペクトルの分析
- ・Gaborウェーブレット
- ・信号の最小単位
- ・離散ウェーブレット変換

多重解像度解析

- ・大局的構造と局所的構造
- ・零交差とスケール・スペース

信号の多重解像度解析

$f(t)$: 処理対象信号

$$g(t, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \text{ (正規化ガウス関数)}$$

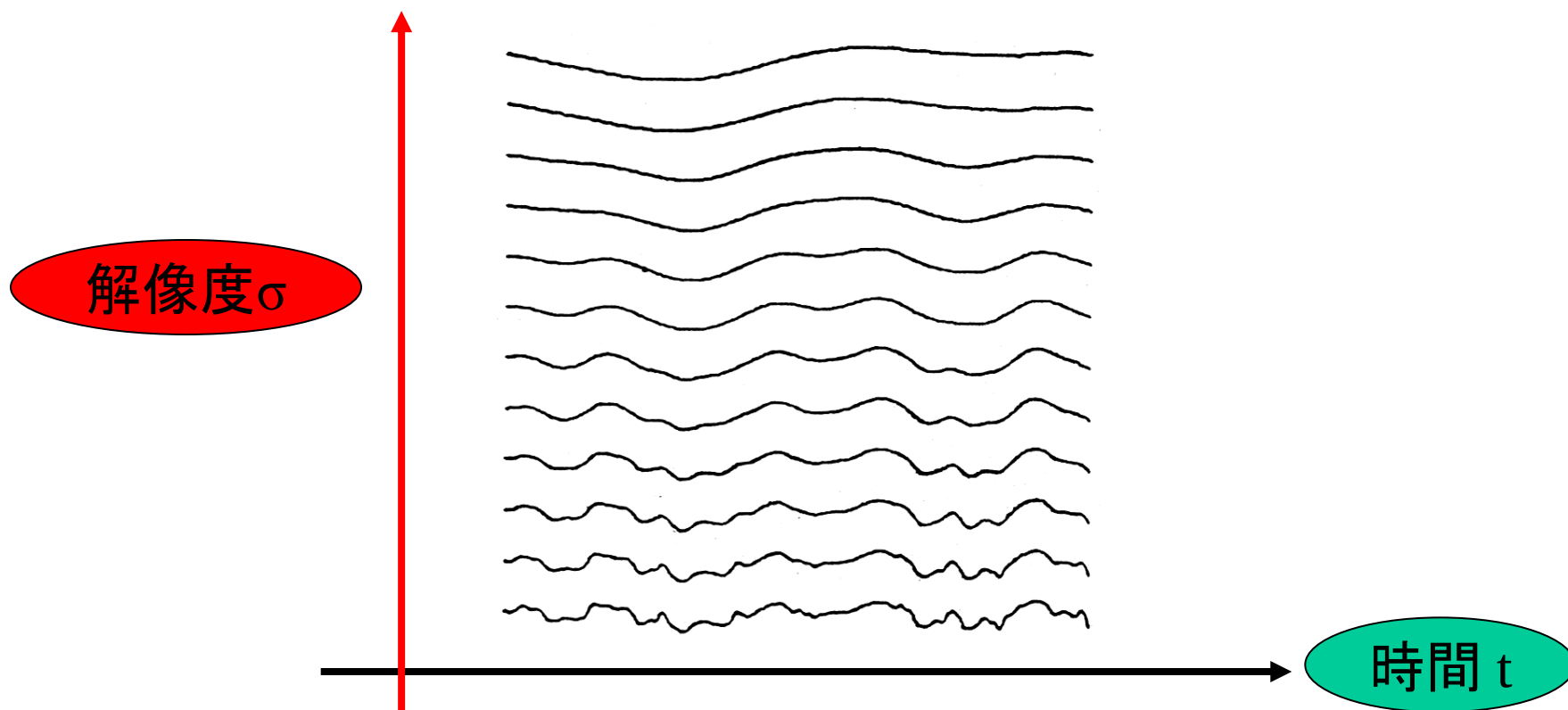
$$\bar{f}(t, \sigma) = f(t) * g(t, \sigma)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-u)^2}{2\sigma^2}} du$$

σ を変えると解像度が変わる

信号の多重解像度解析

$$\bar{f}(t, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-u)^2}{2\sigma^2}} du$$

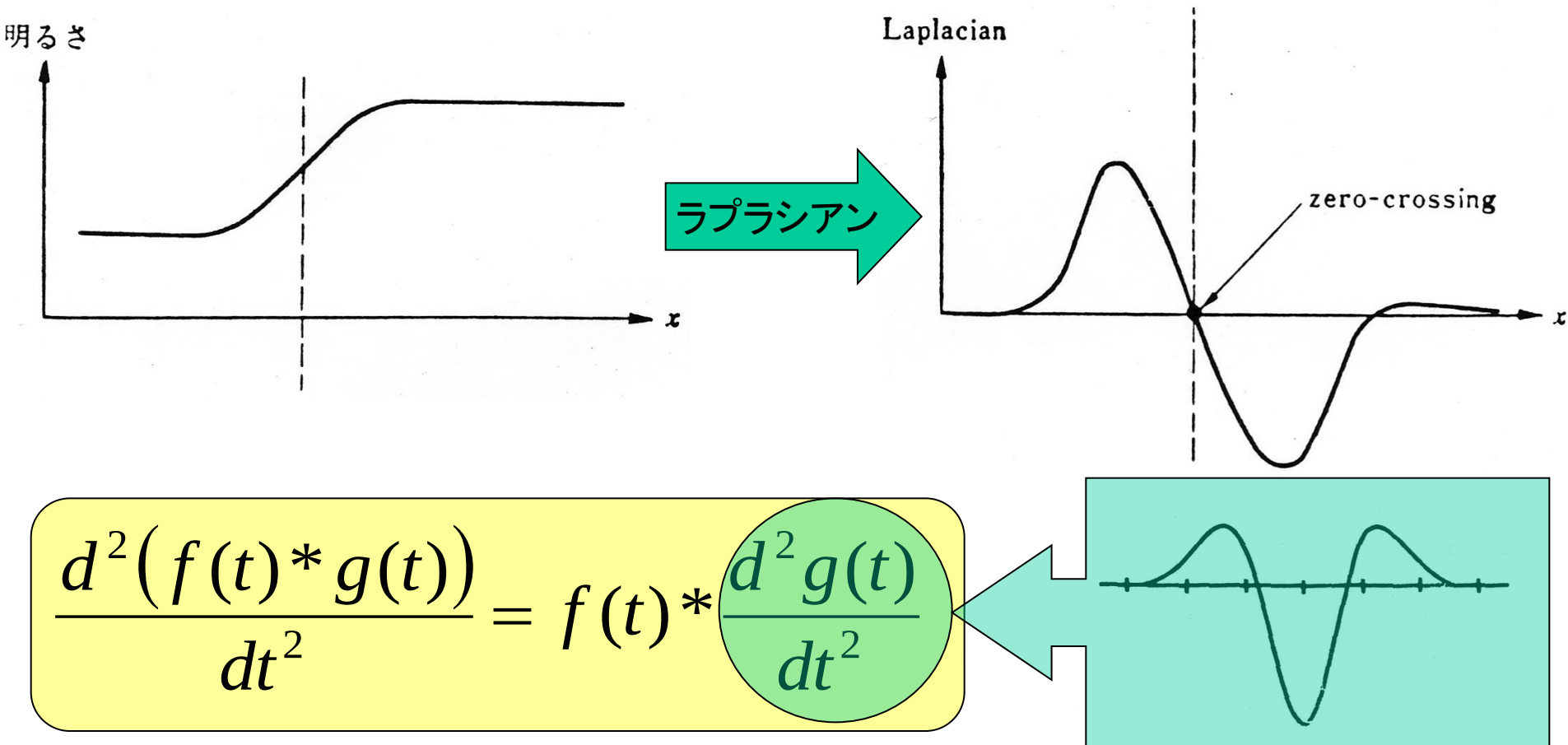


σ を変えると解像度が変わる

信号の多重解像度解析

信号変化の零交差点(zero crossing point):

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = 0 \text{となる} t$$



演習課題37

$$\frac{d^2(f(t)*g(t))}{dt^2} = f(t)*\frac{d^2g(t)}{dt^2}$$

が成り立つことを証明し、

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \text{のとき}$$

$\frac{d^2g(t)}{dt^2}$ を計算しなさい。

信号の多重解像度解析

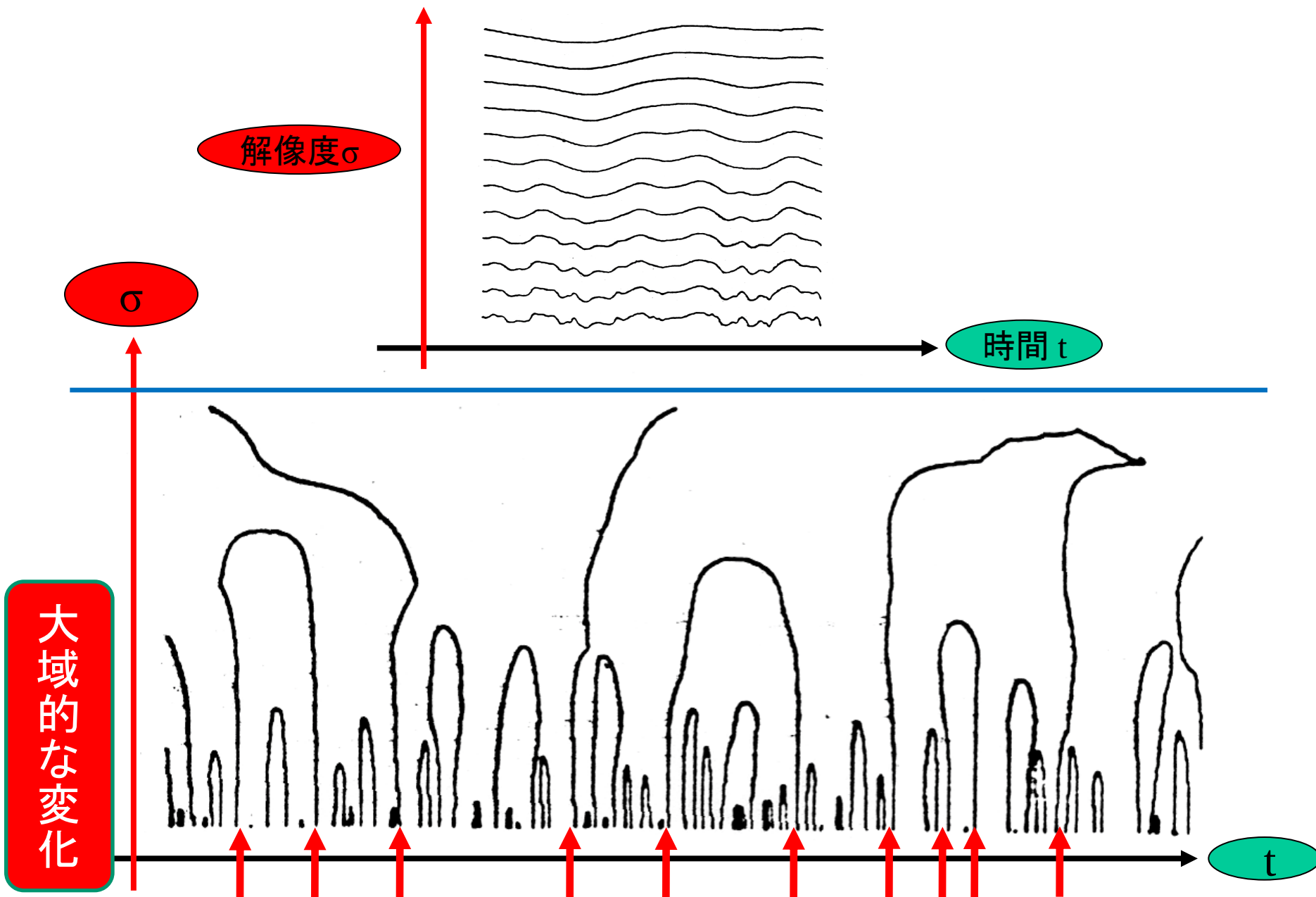
解像度 σ

σ

時間 t

大域的な変化

t



【第一話】 信号処理の基礎理論



【第二話】 実世界における信号処理

- (1) 信号の周波数特性の時間的变化の分析
 - a. 短時間フーリエ変換
 - b. ウェーブレット変換
 - c. 多重解像度解析
- (2) 相関関数を使った信号・画像処理
- (3) 信号の統計的分析
 - a. 主成分分析
- (4) マルチメディア信号の符号化
 - a. 音声信号の符号化
 - b. 画像の符号化
 - c. ビデオの符号化

信号の持つ情報分析

照合(マッチング)

- ・相関関数の最大値探索

【応用】

- ① パターン認識
- ② ステレオ視による3次元距離計測
- ③ 動画像からの運動計測

【文字列照合】

- ① WEB検索
- ② DNA分析
- ③ パターン照合
- ④ ユニフィケーション

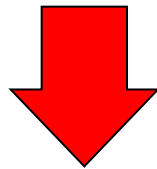
主成分分析

- ・信号の統計的分析

- ① 意味のある情報(特徴)抽出
- ② 高次元信号の低次元化

【情報抽出】

- ① 独立成分分析
- ② 判別分析



信号の符号化

相関関数を使った信号・画像処理

相関関数による信号・画像解析

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(s-t)ds \quad \text{のとき} \quad Y(\omega) = F(\omega)G(\omega)^*$$

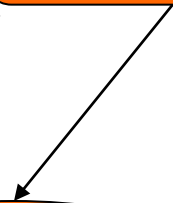
信号間の 2 乗誤差 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - g(t))^2 dt$$

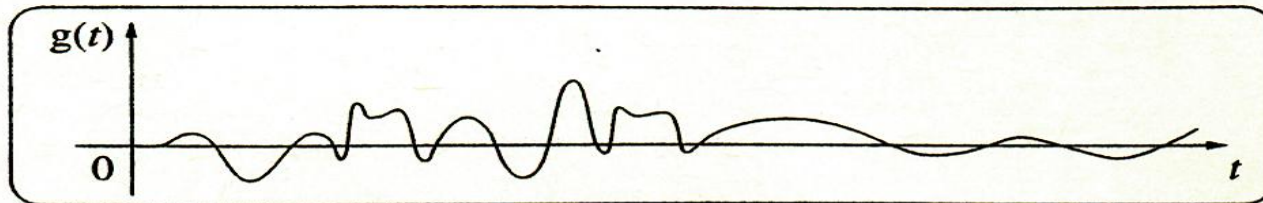
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (f^2(t) - 2f(t)g(t) + g^2(t))dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt$$

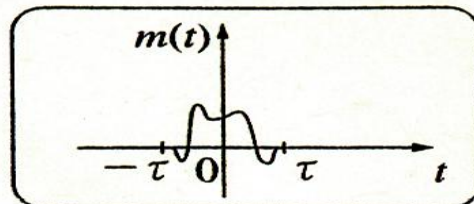
相関関数



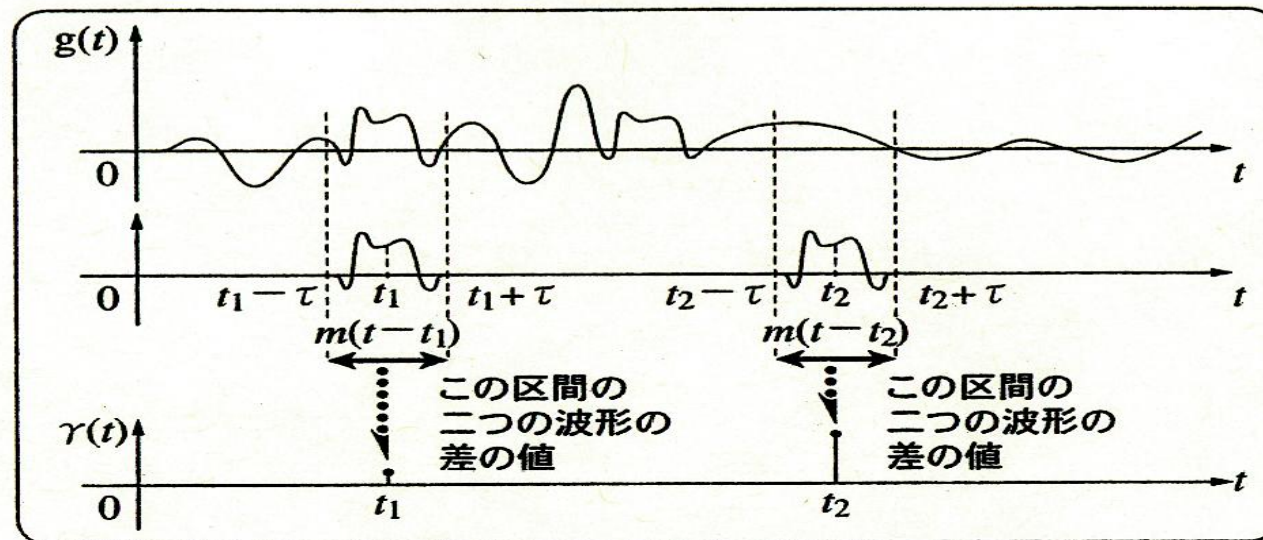
相関関数: $$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s)m(s-t)ds$$



(a) 処理対象信号



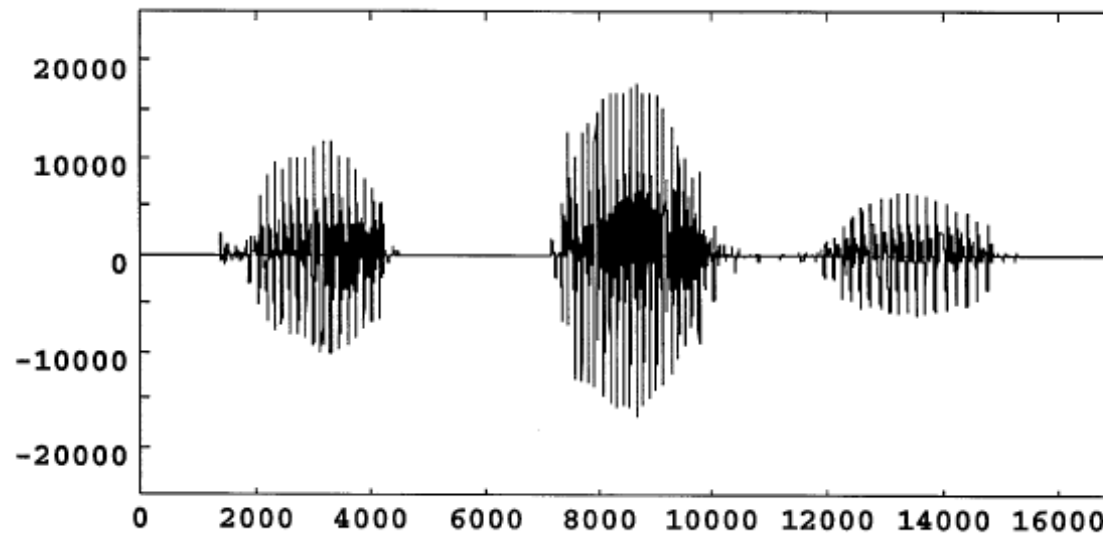
(b) テンプレート波形



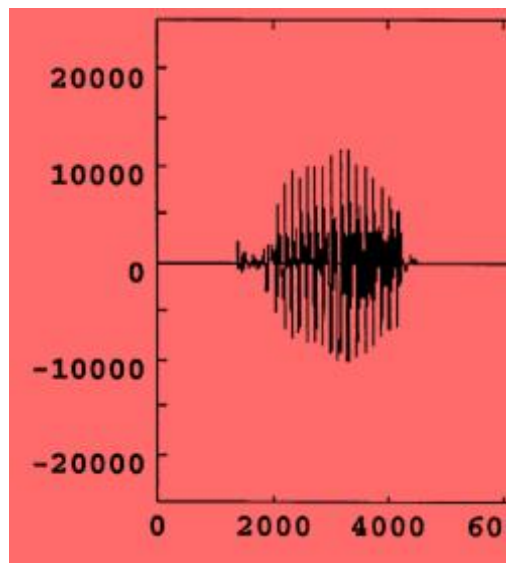
(c) テンプレート波形との非類似度を表す関数の計算

相関関数:
$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s)m(s-t)ds$$

あ た ま



あ



相関関数による画像処理

2つの画像の差（非類似度）

$$\begin{aligned} D(\alpha, \beta) &= \iint_S \{f(x + \alpha, y + \beta) - t(x, y)\}^2 dx dy \\ &= \iint_S t(x, y)^2 dx dy + \iint_S f(x + \alpha, y + \beta)^2 dx dy \\ &\quad - 2 \iint_S t(x, y) f(x + \alpha, y + \beta) dx dy \end{aligned}$$

相関関数（類似度）

$$S(\alpha, \beta) = \iint_S t(x, y) f(x + \alpha, y + \beta) dx dy$$

正規化相関関数

$$S^*(\alpha, \beta) = \frac{\iint_S \{t(x, y) - \bar{t}\} \{f(x + \alpha, y + \beta) - \bar{f}\} dx dy}{\sqrt{\iint_S \{t(x, y) - \bar{t}\}^2 dx dy} \sqrt{\iint_S \{f(x + \alpha, y + \beta) - \bar{f}\}^2 dx dy}}$$

画像の位置合わせ

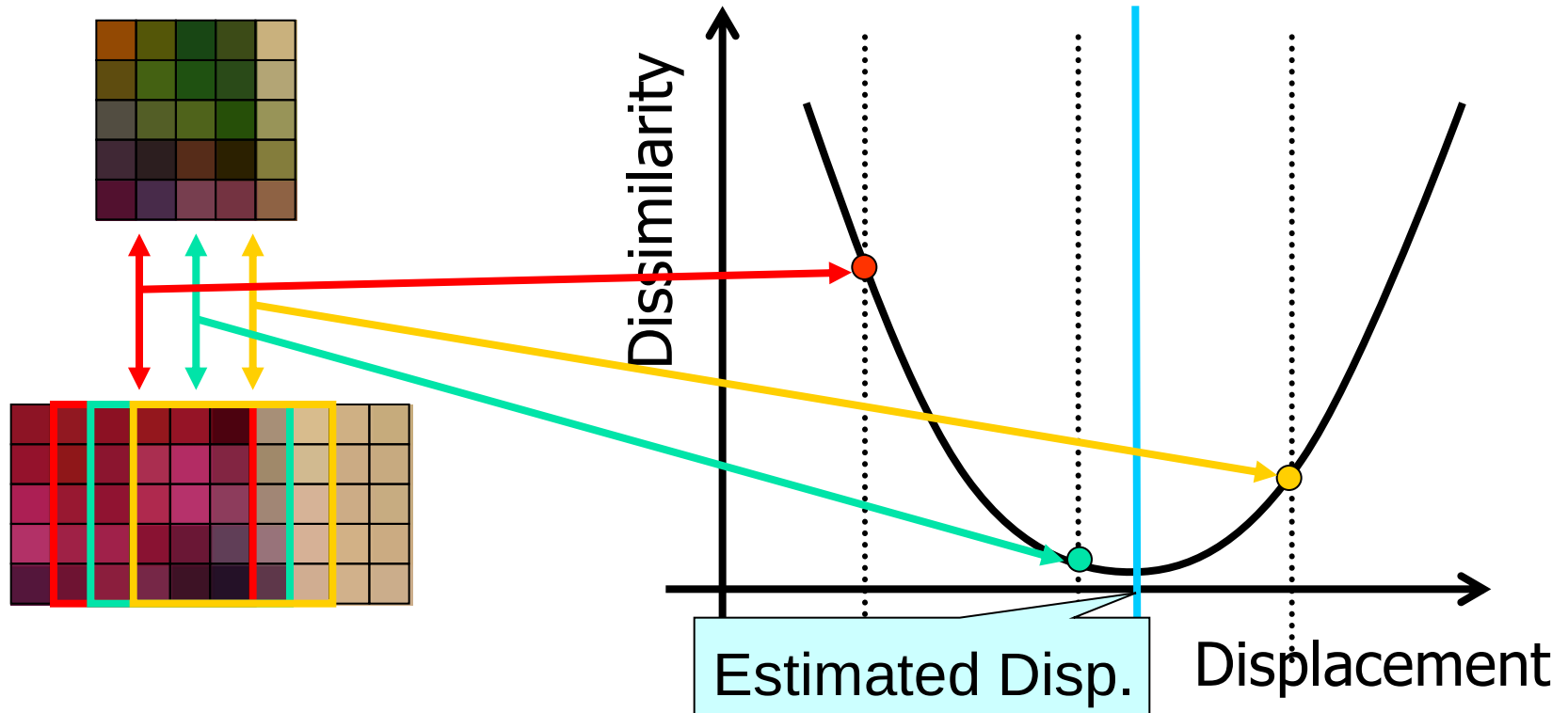
- Resultant displacement is in units of pixels.



サブピクセル精度のマッチング (パラボラ補間)

- Assume dissimilarities between integer point can be interpolated by a parabola function

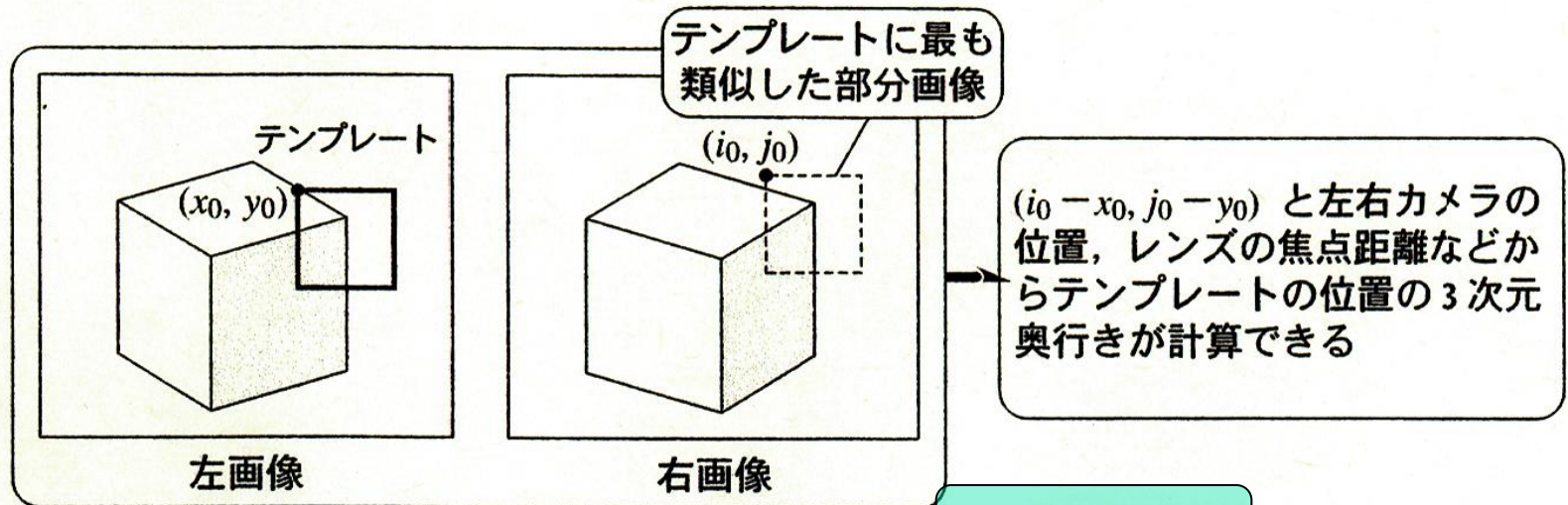
SSD-Parabola Fitting



相関関数による画像処理

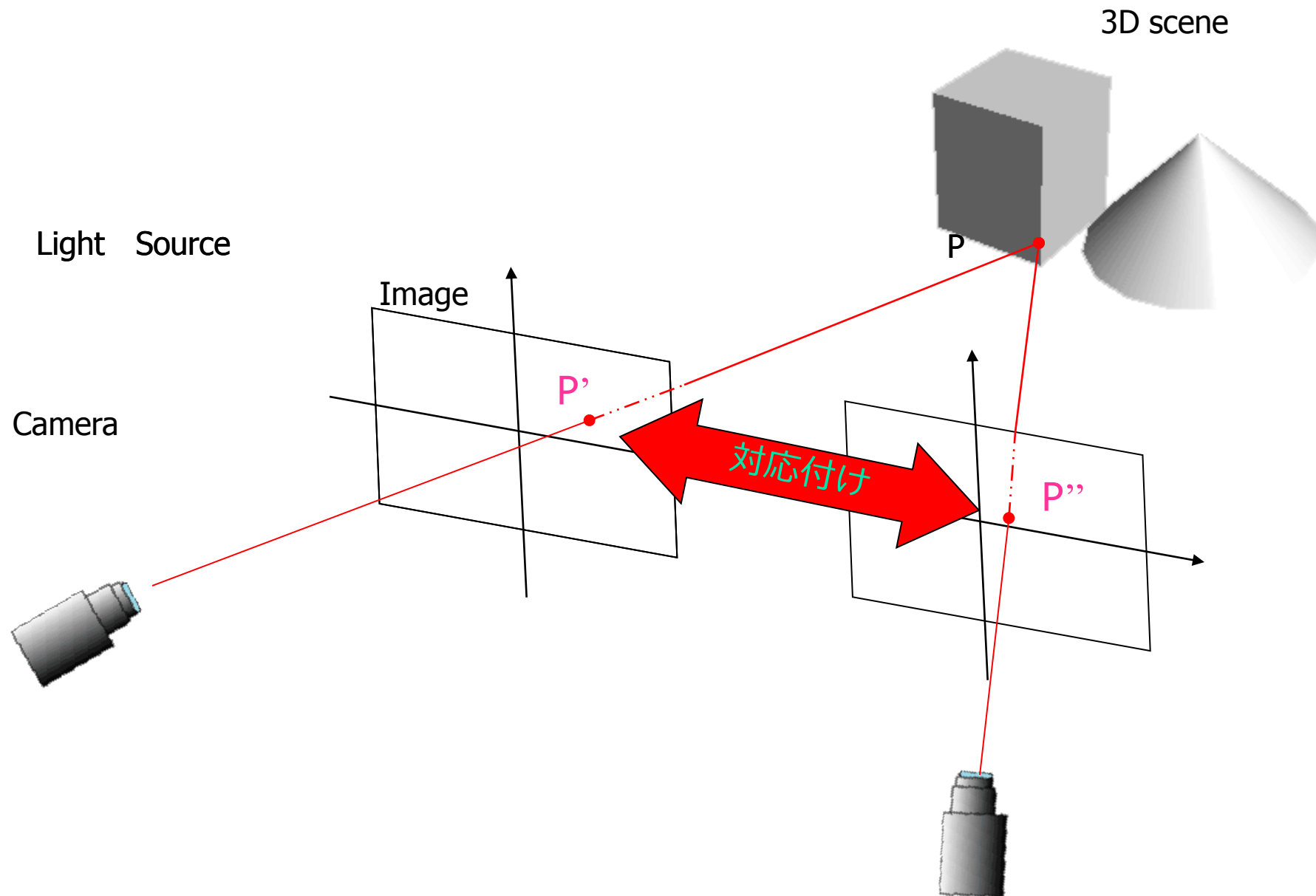
 $f(x, y)$ $t(x, y)$ 

相関関数による画像処理



(a) テンプレートマッチングを使ったステレオ画像解析

ステレオ（多視点）画像計測



ステレオカメラによる距離計測の原理

左右画像の対応点から、3次元対象までの角度が分かる。

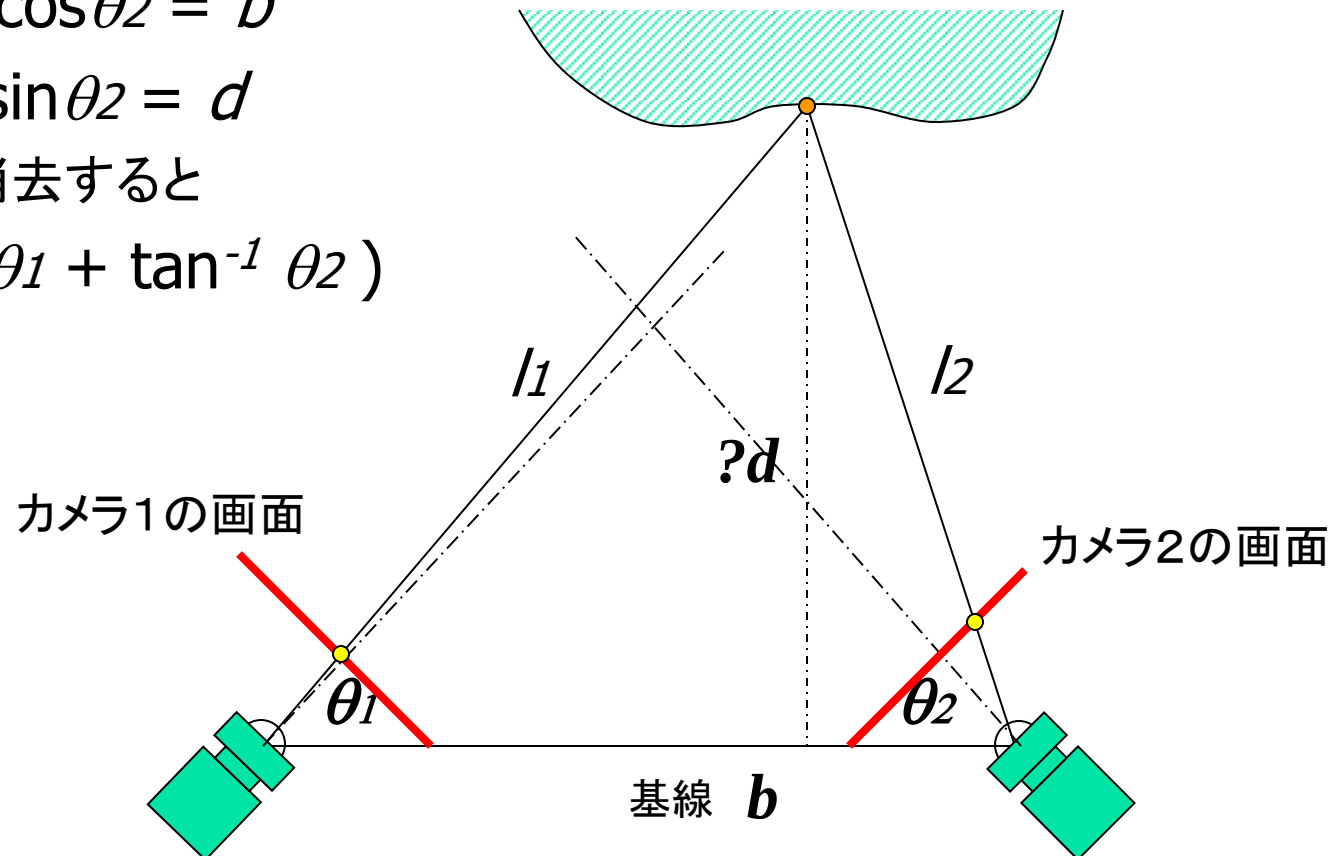
【三角測量の原理】

$$l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 = b$$

$$l_1 \sin \theta_1 = l_2 \sin \theta_2 = d$$

l_1, l_2 を消去すると

$$d = b / (\tan^{-1} \theta_1 + \tan^{-1} \theta_2)$$



演習課題38

左右画像における画素の大きさを1mm、画像平面と投影中心までの距離を100mmとしたとき、前記の方法による対象点までの奥行き計算法に現れる計測精度(誤差)がどのようなになるかを求めなさい。

このことから、ステレオ画像解析によって、精度よく奥行きを計算するためには、左右カメラをどのように設置すればよいかを考えなさい。

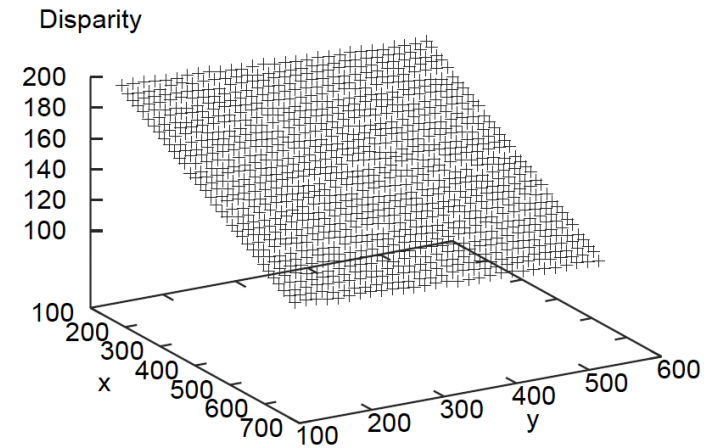
ステレオ画像を用いた3次元奥行き計測



Left Image



Right Image



Calculated Disparity

Types of Methods	Average of Err.	Variance of Err.
Symmetric SSD-Parabola	0.4481	0.1148
EEC	0.4438	0.1129
Asymmetric SSD-Parabola	0.4272	0.1051
Asymmetric SSD-Parabola + EEC	0.4209	0.1020

ウィンドウサイズ



左画像



右画像



$W = 3$



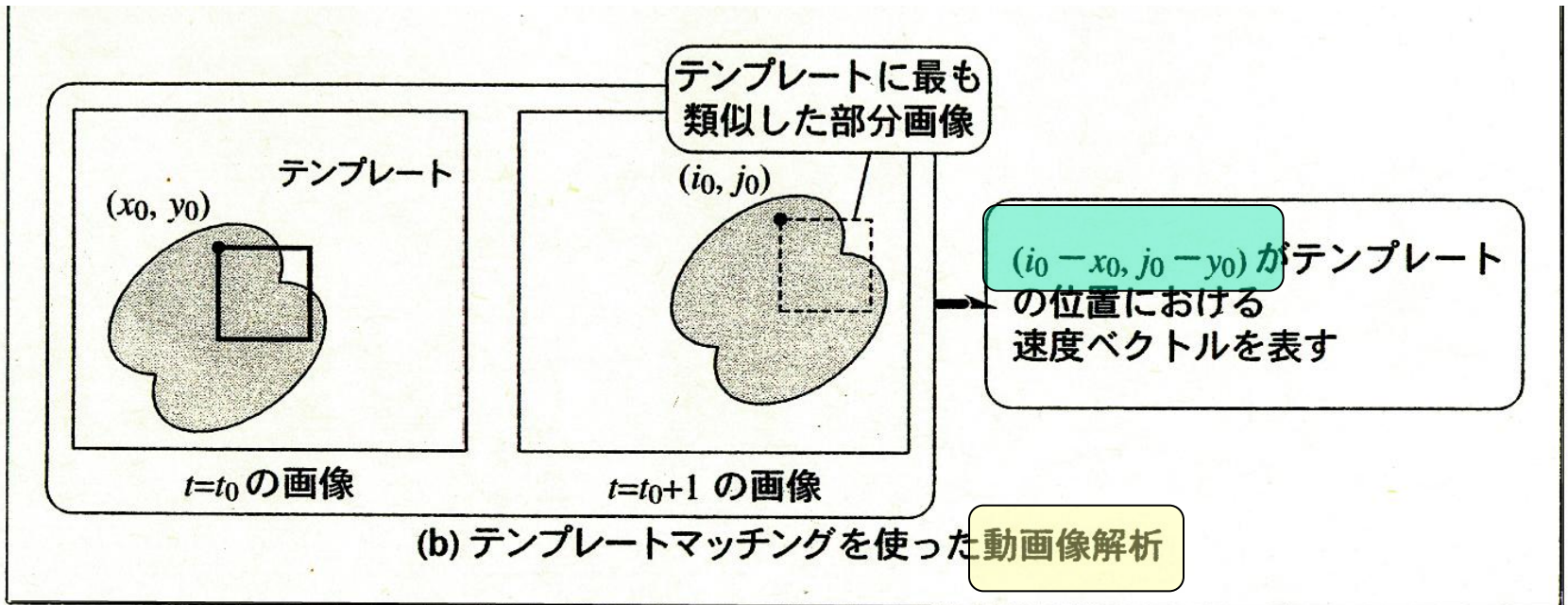
$W = 20$

距離（視差）画像

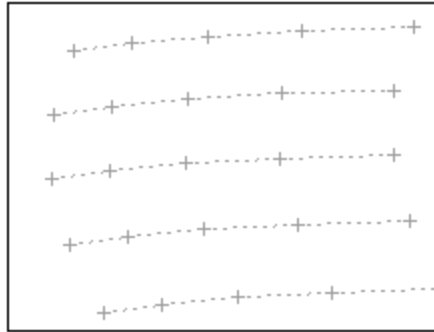
明るい=近い

- ウィンドウサイズの影響
- 適応的にウィンドウサイズを変更するなどの試み
（複数のサイズから一番ふさわしいものを選択）

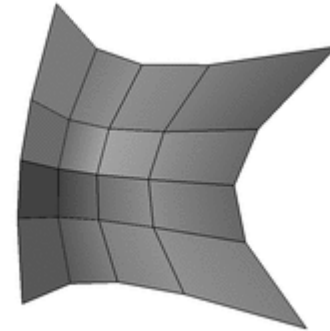
相関関数による画像処理



Shape from Motion



動画像



復元された3次元平面



さあ、基本手法は学んだ！
次は、応用だ！！