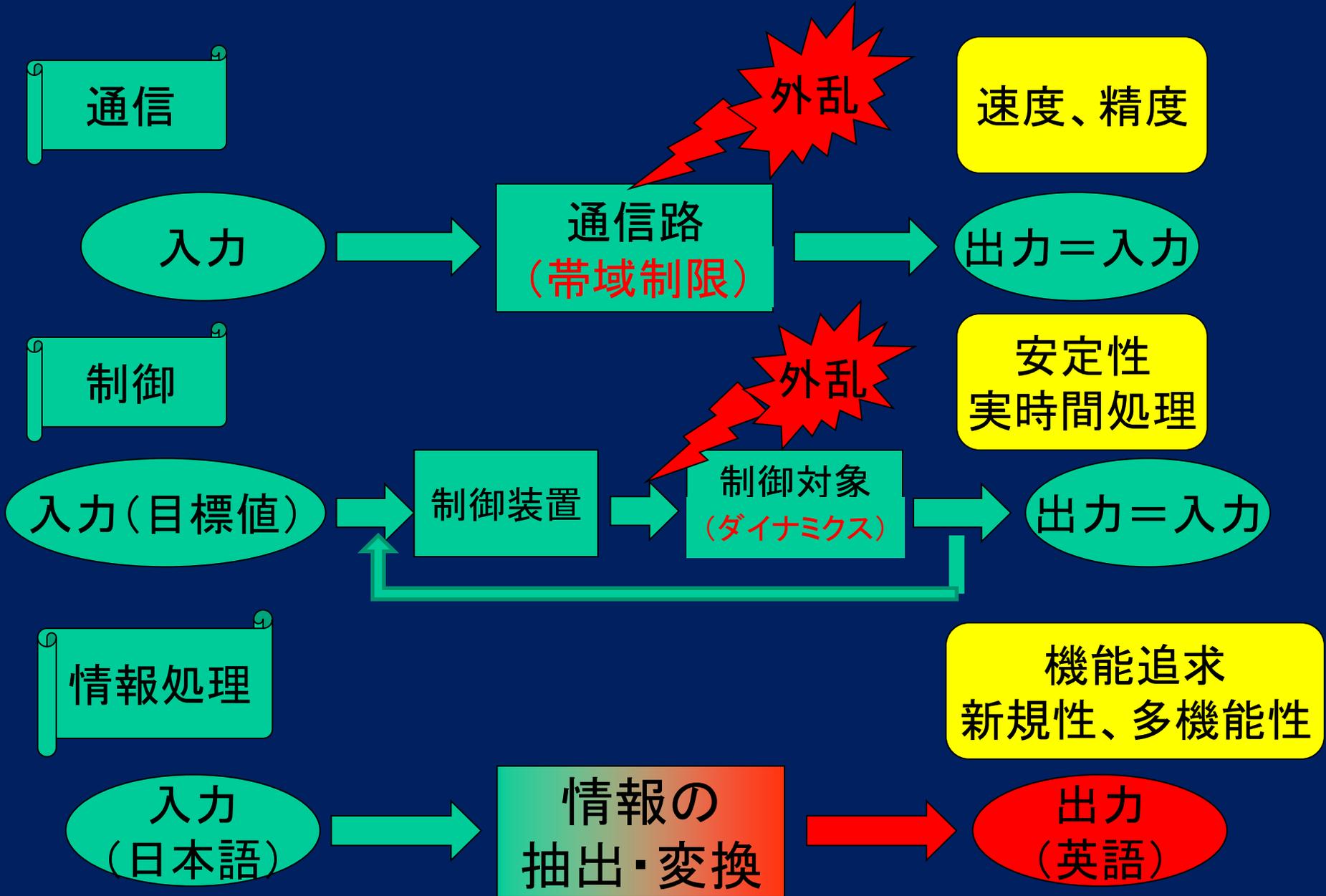


第二部

離散時間システムによる デジタル信号処理

教科書第4章(66ページ～)

通信 VS 制御 VS 情報処理



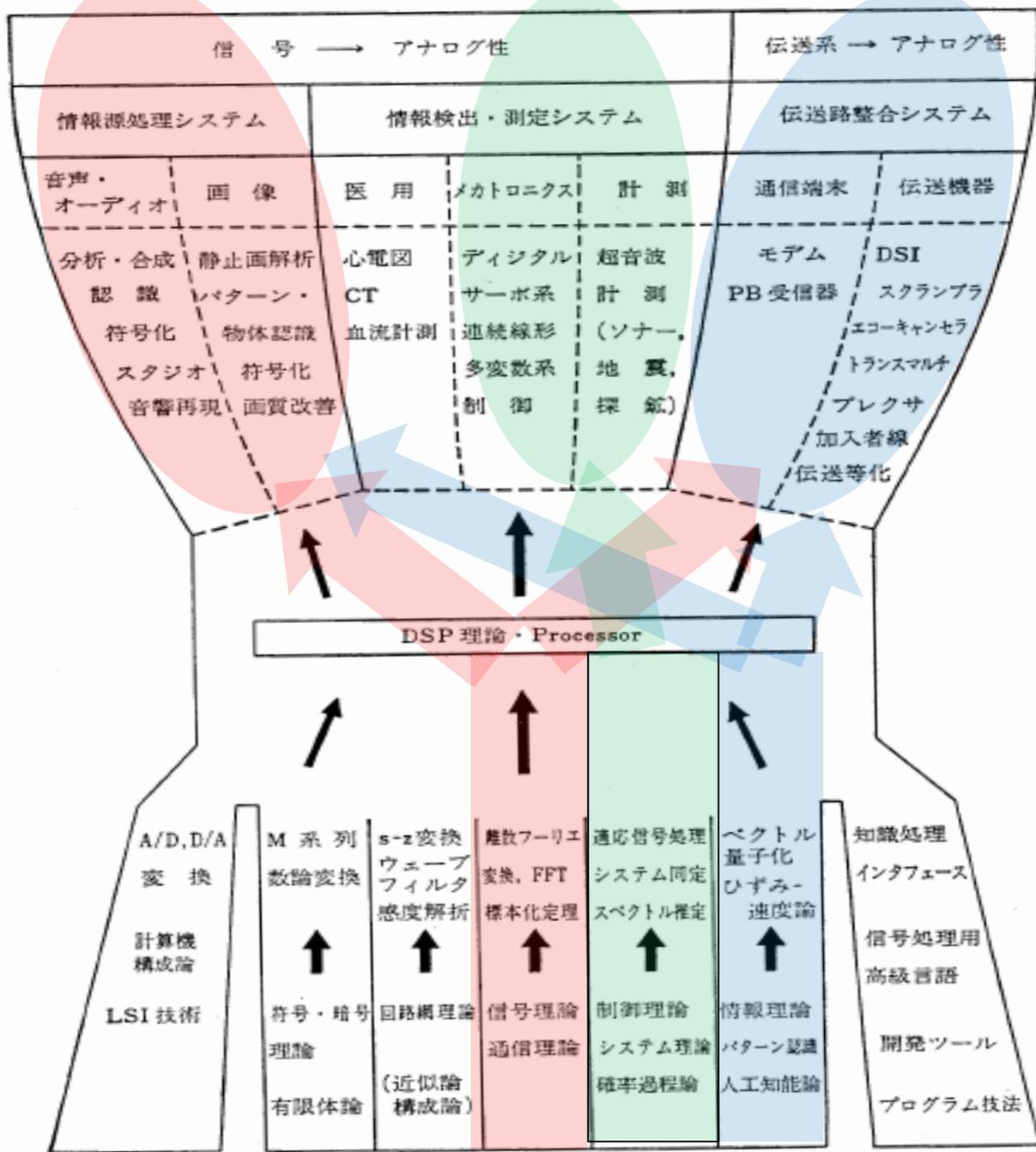


図 1.6 デジタル信号処理の展望

直交変換に基づく信号処理

直交変換

$x(t)$: 計測された信号

$X(\omega)$:
変換領域で現された信号

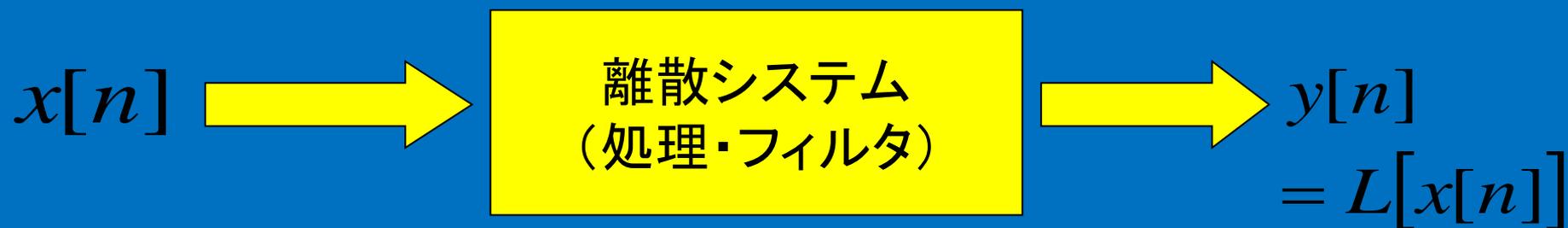
フィルタリング

逆変換

演習課題46

なぜわざわざ変換領域でフィルタリングをするのか、理由を考えなさい。

離散システムに基づく信号処理



演習課題47

この図式に基づいた処理では、周波数特性は考えないのか？

離散時間システム

Discrete-time system

入力： 離散時間信号 $x[n]$

出力： 応答 $y[n]$

離散時間信号を入出力とし、 $x[n]$ を $y[n]$ に対応させる変換(写像)とみなすことができる

$$y[n] = L[x[n]] \quad (4.1)$$

変換 L には様々なクラスがある。

線形時不変システム

Linear Time Invariant system

- 線形システム / linear system

$$y_1[n] = L[x_1[n]]$$

$$y_2[n] = L[x_2[n]]$$

$$\begin{aligned} \rightarrow L[ax_1[n] + bx_2[n]] &= aL[x_1[n]] + bL[x_2[n]] \\ &= ay_1[n] + by_2[n] \quad (a, b \text{ は任意定数}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

- 時不変システム / time-invariant system

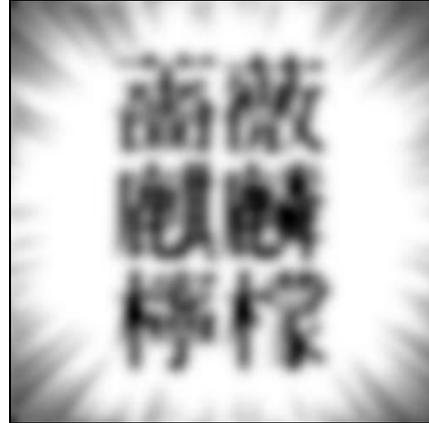
$$y[n] = L[x[n]] \quad (\text{shift-invariant system ととも呼ばれる})$$

$$\rightarrow L[x[n-k]] = y[n-k] \quad (4.3)$$

位置不変な劣化



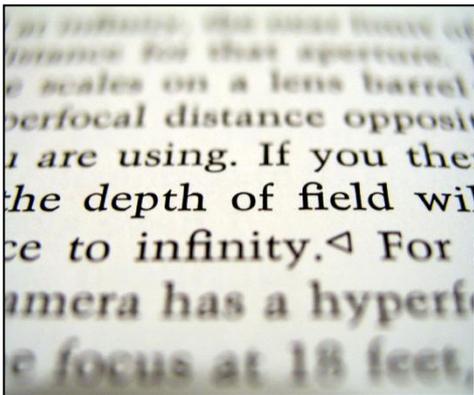
ピンボケ



横方向のブレ



位置不変でない劣化(画像は英語版 wikipedia より引用)

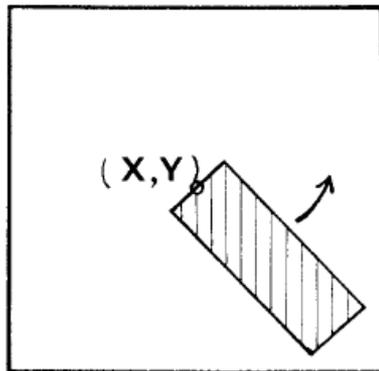
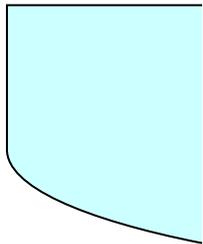
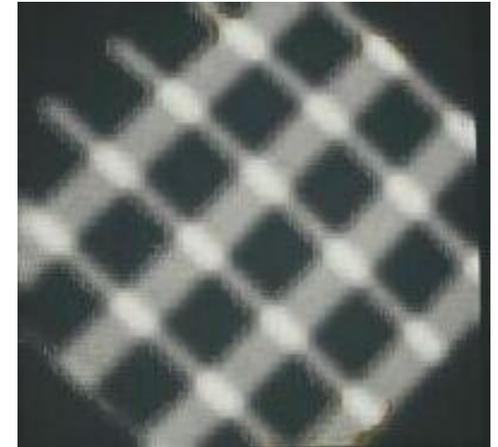
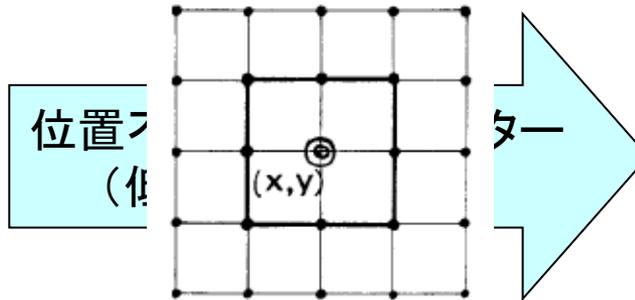
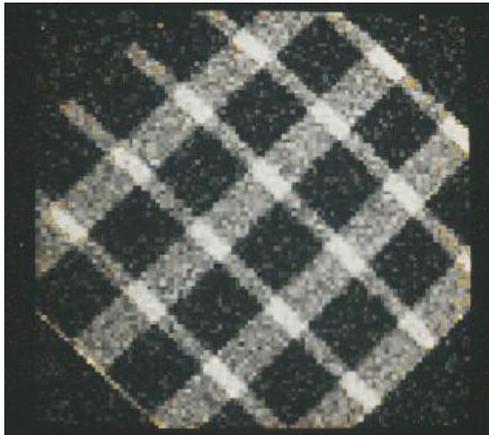


位置不変な**非**線形フィルタの例

メディアン・フィルタ

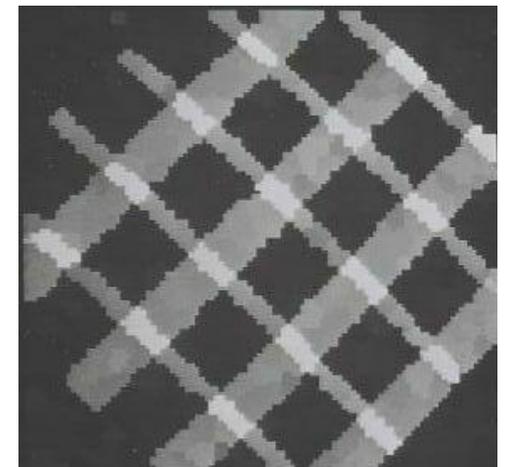
$$y[n] = L[x[n]] = \text{median}(x[n-1], x[n], x[n+1])$$

エッジを保ったスムージング



低域通過と高域通過
フィルタの同時実現

非線形演算

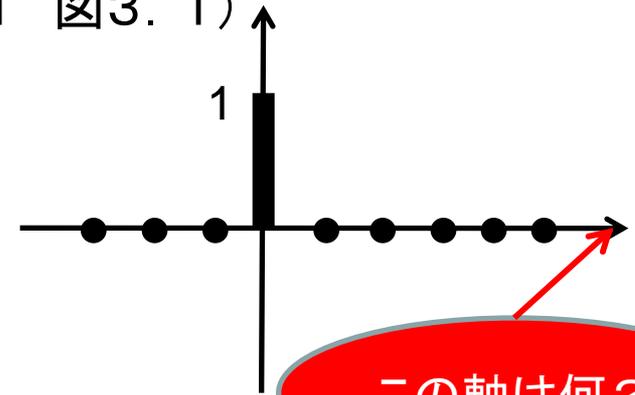


画素(x,y)を中心にマスクを回転させ、
マスク内の明度分散が最小の位置を求め、
その平均明度を出力画像の画素(x,y)の値とする。

単位インパルスと単位ステップ信号

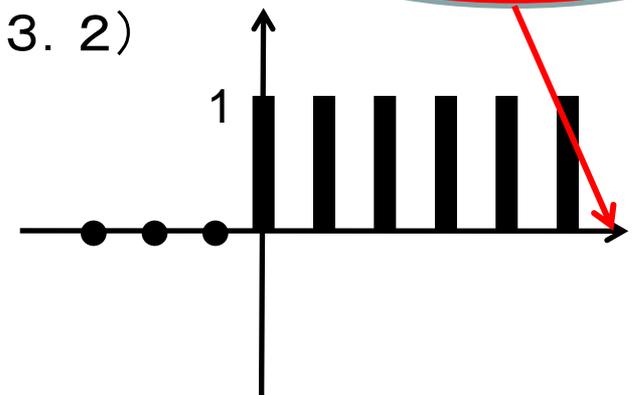
- 単位インパルス信号 (教科書p41 図3. 1)

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



- 単位ステップ信号 (教科書p42 図3. 2)

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



FIRとIIRシステム

- 有限長インパルス応答システム

/ finite impulse response, FIR

インパルス応答が、ある有限な時間のみで零でない値をとる

- 無限インパルス応答システム

/ infinite impulse response, IIR

(単位)インパルス応答 / impulse response

単位インパルス $\delta[n]$ をシステムに入力したときの応答

$$h[n] = L[\delta[n]] \quad (4.4)$$

演習課題48

連続時間インパルス関数の $\delta(t)$ と
離散時間インパルス関数 $\delta[n]$ の違いを述べなさい。
【ヒント】両者の周波数特性を比較するのも一案。
離散時間信号は数列であり、その周波数特性は
定義されなければならない。

LTIシステムの性質と条件

- 因果的なシステム / causal system

応答 $y[m]$ が $n \leq m$ なる入力 $x[n]$ のみで決まる

- LTIシステムが因果的であるための必要十分条件：
インパルス応答が因果的なこと

$$h[n] = 0 \quad n < 0 \quad (4.5)$$

- 安定なシステム / stable system

入力 $x[n]$ の大きさが有界なら応答 $y[n]$ も有界

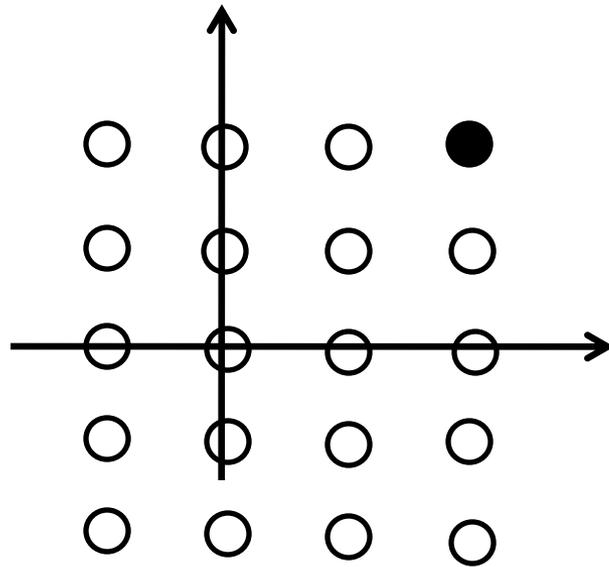
- LTIシステムが安定であるための必要十分条件：
インパルス応答が以下の条件を満たすこと

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \quad (4.6)$$

演習課題49

- ・2次元離散時間信号の処理において、因果的、非因果的はどのように定義すればよいのだろうか？
つまり、1次元の場合は、時間という全順序があるが、2次元(以上)の場合は、順序自身を定義しなければならない。
- ・制御理論も含め、いわゆる信号処理分野では、因果性を想定した理論が主流であるが、画像処理では、因果性はほとんど気にされない。この理由を考察しなさい。

2次元離散時間信号の因果性



○ は ● より前
と定義

2次元LSIシステムは、その出力 $y[m,n]$ が、
入力 $x[m,n]$ およびそれより前の入力によってのみ
決定されるとき、因果的であるという。



最も単純な移動平均フィルタは因果的でない！

$$y[m,n] = \frac{1}{9} \sum_{i=-1}^{1} \sum_{j=-1}^{1} x[m+i, n+j]$$

LTI離散時間システムの基礎式

LTIシステムの入出力信号の関係：
応答は

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] \quad (4.7,8)$$

→ 入力信号 $x[n]$ とシステムのインパルス応答
の離散たたみ込み (交換可能)

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \quad (4.12,13)$$

LTI離散時間システムの基礎式の証明

任意の離散時間信号 $x[n]$ は

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] \quad (4.9)$$

と表すことができる。

$$y[n] = L \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] \right] \quad (4.10)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] L[\delta[n-k]] \quad (4.11)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

$$= x[n] * h[n] \quad (4.12)$$

Linear

Time
Invariant

因果的なLTIシステムの入出力関係

$h[n] = 0 \quad n < 0$ より $h[n-k] = 0 \quad n < k$ なので

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^n x[k] h[n-k] \quad (4.14)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h[k] x[n-k] \quad (4.15)$$

$x[n]$ も因果的ならば $y[n]$ も因果的となる。

$$y[n] = \left[\sum_{k=0}^n x[k] h[n-k] \right] u[n] \quad (4.16)$$

$$= \left[\sum_{k=0}^n h[k] x[n-k] \right] u[n] \quad (4.17)$$

演習課題50
これを証明しな
さい。

演習課題51

離散システムに基づいた信号処理では
なぜ因果性に拘るのか考えて見よう。

Z変換の復習

(Z変換とフーリエ変換の関係)

Z変換:教科書3. 3節(46ページ~)

離散時間信号

標本化された信号

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s) \quad \omega_s = 2\pi/T$$

離散時間信号

$$x[n] \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

フーリエ変換を求めるため

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT)$$

と考える。

離散時間信号のフーリエ変換

標本化信号の
フーリエ変換

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s) \quad \omega_s = 2\pi/T$$

$$F[x_c(t)](\Omega) = F\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT)\right] \quad \Omega = \omega T$$

$X_c(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]F[\delta(t - nT)]$ は周期関数なので

フーリエ級数展開の係数として

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\Omega T} \quad (\delta(t - \tau) \leftrightarrow e^{-j\omega\tau} \text{より})$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_c(\Omega) e^{jn\Omega T} d\Omega$$

Z変換とフーリエ変換

$$X_c(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\Omega} \quad \Omega = \omega T$$

ここで $z(\Omega) = e^{j\Omega} = e^{j\omega T}$ とおくと、

$$X_c(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z(\Omega)^{-n}$$

これを一般化して

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

と書き z 変換と定義する。

【注意 1】 z は連続の複素数、 $X(z)$ は連続の複素関数

【注意 2】 $z(\Omega) = e^{j\omega T}$ であるが、 z は一般の複素数なので $z = re^{j\omega T}$ (r : 実数) とすると入力信号を r^{-n} で減衰させ、フーリエ変換を求めていることになる。

離散時間信号の連続信号モデル

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT)$$

このラプラス変換

$$X_c(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-nsT}$$

$z = e^{sT}$ とおくと

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

情報の世界

情報世界対象

数値
文字
図形
グラフ
木構造

実世界対象

人
自動車
犬
猫
不動産

対象

実世界

デジタル信号
 $x[n]$

復号化
パラメータ
(T)

符号化
パラメータ
(T)

離散時間信号の
数学モデル
 $x_c(t)$

標本化信号
 $x_s(t)$

信号
 $x(t)$

数学の世界

計測

デジタル

量子化
(符号化)

標本化

フーリエ変換の性質

$$\text{【時間シフト】 } x(t-b) \leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega b}$$

ラプラス変換の性質

$$\text{【時間シフト】 } x(t-a) \Leftrightarrow X(s)e^{-as} \quad (a > 0)$$

より、

1 サンプル間隔 T だけ時間をずらすと、

$$x(t-T) \leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega T} = X(\omega)z(\Omega)^{-1}$$

$$x(t-T) \Leftrightarrow X(s)e^{-Ts} = X(s)z^{-1}$$

となり、 z^{-1} は時間を T だけずらすという意味を持つと
考えてもよい。

離散システムに基づく信号処理



定係数線形差分方程式

LTI離散時間システムを記述する式

$$y[n] = \sum_{k=0}^M a_k x[n-k] - \underbrace{\sum_{k=1}^N b_k y[n-k]}_{\text{フィードバック項}} \quad (4.18)$$

演習課題
52
これが
LTIシステムである
ことを示
しなさい。

乗算と加算で演算可
安定で因果的なLTIシステムを規定する

(不安定、非因果的なシステムも含む) → 境界・安定条件が必要

(例) $y[n] = x[n] + by[n-1]$ (4.19)

【 $\delta[n]$ に対する出力】 ① $y[n] = b^n u[n]$ (4.20)

② $y[n] = -b^n u[-n-1]$ (4.21)

非再帰系システム

Non-recursive system

線形差分方程式で過去の出力を用いない

$$y[n] = \sum_{k=0}^M a_k x[n-k] \quad (4.22)$$

インパルス応答は有限長:

$$h[n] = a_n \text{ (if } 0 \leq n \leq M), 0 \text{ (otherwise)} \quad (4.23)$$

→FIRシステムとなる
(再帰系システムは

FIRシステムにもIIRシステムにもなる)

LTI離散時間システムのシステム関数

System function

入力 $x[n]$ に対するシステム応答 $y[n]$ は離散たたみ込み
$$y[n] = h[n] * x[n] \quad (4.24)$$

それぞれのZ変換について

$$Y[z] = H[z]X[z] \quad (4.25)$$

システム関数 or システムの伝送(伝達)関数

transfer function :
$$H[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} \quad (4.26)$$

インパルス応答 $h[n]$ のZ変換 ($X[z]=1$ に対する応答)

$$\Leftrightarrow H[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} \left(= \sum_{n=0}^{N-1} h[n]z^{-n} \text{ if FIR System } \right) \quad (4.27,28)$$

差分方程式とシステム関数

$$y[n] = \sum_{k=0}^M a_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N b_k y[n-k] \quad (4.29)$$

両辺を z 変換すると

$$\left[1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k} \right] Y(z) = \left[\sum_{k=0}^M a_k z^{-k} \right] X(z) \quad (4.30)$$

システム関数は

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M a_m z^{-m}}{\left(1 + \sum_{n=1}^N b_n z^{-n} \right)} \quad (4.31)$$

システム関数の極と零点

システム関数の零点 / zero : $H[z]=0$ とする変数 z の値
極 / pole : $H[z]$ を発散させる特異点

$$H[z] = C \frac{\prod_{m=1}^M (1 - \alpha_m z^{-1})}{\prod_{n=1}^N (1 - \beta_n z^{-1})} \quad (4.32)$$

と因数分解できる関数の

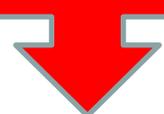
零点 : $z_m = \alpha_m (m = 1, 2, \dots, M)$ と $z = 0$

極 : $z_n = \beta_n (n = 1, 2, \dots, N)$

安定性条件はインパルス応答 $h[n]$ が絶対総和可能であること (p69 (4.6)式)

⇔ 極 z_n がすべて z 平面の単位円内に存在すること $|z_n| < 1$

演習課題53
これを証明しなさい。



非再帰形システムの極と零点

非再帰形システムのシステム関数

$$H[z] = \sum_{m=0}^M a_m z^{-m} \quad (4.34)$$

極 : $z = 0$

⇒ 常に安定

まとめ - LTI離散時間システム

システムのインパルス応答： $h[n]$

応答：入力信号と $h[n]$ の離散たたみ込み

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

線形差分方程式：

$$y[n] = \sum_{k=0}^M a_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N b_k y[n-k]$$

システム伝達関数： $h[n]$ の z 変換

$$H[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

LTI離散時間システムの周波数特性

frequency response

入力：離散的複素正弦波（角周波数 ω ）

$$x[n] = e^{jn\omega T} = \cos(n\omega T) + j \sin(n\omega T)$$

応答： $y[n] = h[n] * e^{jn\omega T}$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega T(n-k)}$$

$$= e^{jn\omega T} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-jk\omega T} \right]$$

定数

→ 入力と同じ周波数を持つ離散時間領域の
正弦波信号 $e^{jn\omega T}$ の振幅と位相が変化した信号

インパルス応答による表現

正弦波信号 $e^{jn\omega T}$ は LTI 離散時間システムの固有関数

(アナログシステムでの複素正弦波 $e^{j\omega t}$ と同様)

→ 入力正弦波信号の変化分を表す量を
周波数特性 / frequency response と定義

$$H[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

より

$$H[e^{j\omega T}] \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-jk\omega T}$$

$$\Omega = \omega T \text{ とおいて、 } H[\Omega] \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-jk\Omega}$$

周波数特性は一般に複素数の値をもち、

Ω の関数として複素平面上を動く (→ 振幅・位相)

システム関数による表現

システム関数 $H[z]$ に対して周波数特性は：

$$H[\Omega] = H[z] \Big|_{z=e^{j\Omega}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-jk\Omega}$$

(システム関数はインパルス応答 $h[n]$ の z 変換)

一般に $H[\Omega] = A(\Omega) e^{j\phi(\Omega)}$

振幅特性(利得) 位相特性

位相遅延/phase delay : $\tau \equiv -\phi(\Omega) / \Omega$

群遅延/group delay : $\tau_g \equiv -d\phi(\Omega) / d\Omega$

幾何学的表現

システム関数 $H[z]$ が因数分解表現
できるとき

$$H[z] = C \frac{\prod_{m=1}^M (1 - \alpha_m z^{-1})}{\prod_{n=1}^N (1 - \beta_n z^{-1})}$$

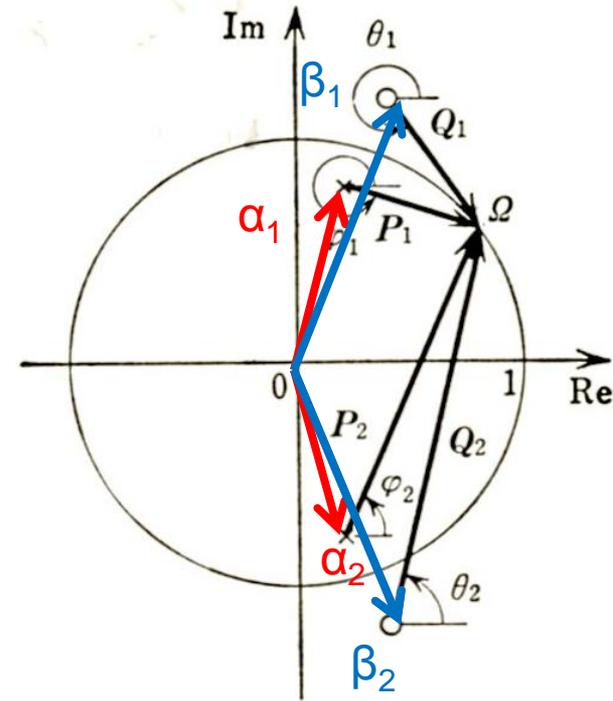


図 4.3 周波数特性の幾何学的解釈

z 平面で周波数特性を考える

$z = e^{j\Omega}$ より、振幅特性 $A(\Omega) = |C| \frac{Q_1 \cdot Q_2 \cdot \dots \cdot Q_M}{P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_M}$

位相特性

$$\phi(\Omega) = (N - M)\Omega + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_M - \varphi_1 - \varphi_2 - \dots - \varphi_N$$

演習課題54

先に示したメディアン(中央値)フィルタやエッジを保ったスムージングといった非線形フィルタの周波数特性(伝達関数)はどうなるか考えてみよう。

離散システムに基づく信号処理



デジタルフィルタの設計

1. フィルタの利用目的は何か。

(例: 雑音除去、エコーキャンセル、劣化の復元、データ圧縮・伝送、音声の基本周波数(ピッチ)などの特徴抽出、...)

2. 必要とされるフィルタの特性は何か。

(例: 直線位相、FIR、IIR、低域通過、高域通過、帯域通過)

3. フィルタの構造(次数)は

4. 安定性が保証されるフィルタの形式に含まれるパラメータを求める。

デジタルフィルタの設計法

0. 逆フィルター

1. 直線位相FIRフィルタの設計

2. 窓関数法によるFIRフィルタの設計

3. アナログフィルタを基にした
デジタルIIRフィルタの設計法 (I)

4. アナログフィルタを基にした
デジタルIIRフィルタの設計法 (II)

5. 双2次フィルタ

FIRフィルタとIIRフィルタの比較

LTIシステム：

$$y[n] = \sum_{k=0}^M a_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N b_k y[n-k] \quad (4.18)$$

$b_k = 0$ の場合：FIRフィルタ

$b_k \neq 0$ の場合：FIR、IIRフィルタ

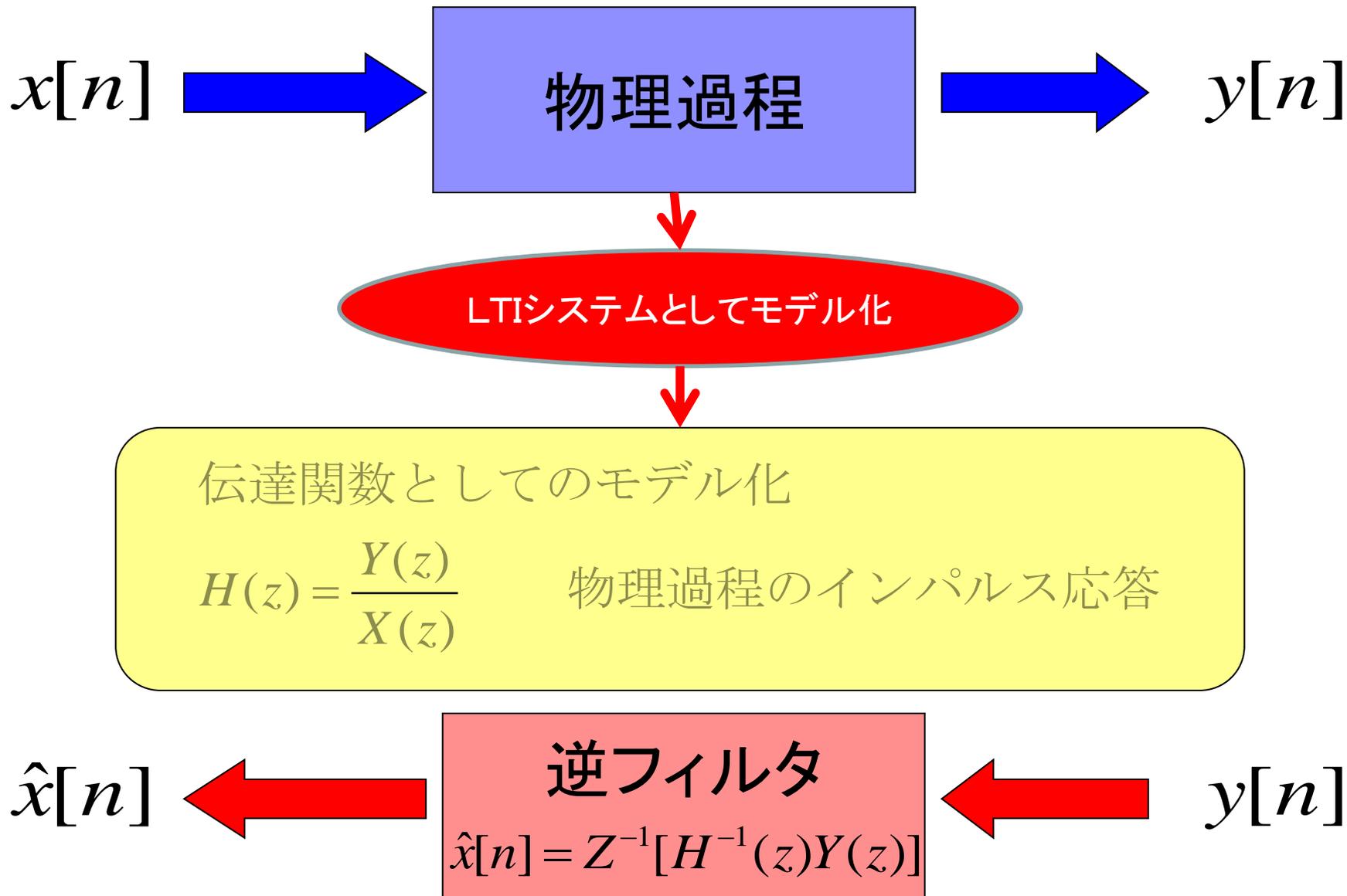
| | FIR | IIR |
|-------|--------|----------|
| 線形位相 | 実現可能 | 近似実現 |
| 遮断特性 | 比較的緩やか | 急峻 |
| 次数 | 高い | 低い |
| 回路規模 | 大きい | 小さい |
| 安定性 | 安定 | 不安定になりうる |
| 量子化誤差 | 累積しない | 累積する |

デジタルフィルタの設計法

0. 逆フィルター

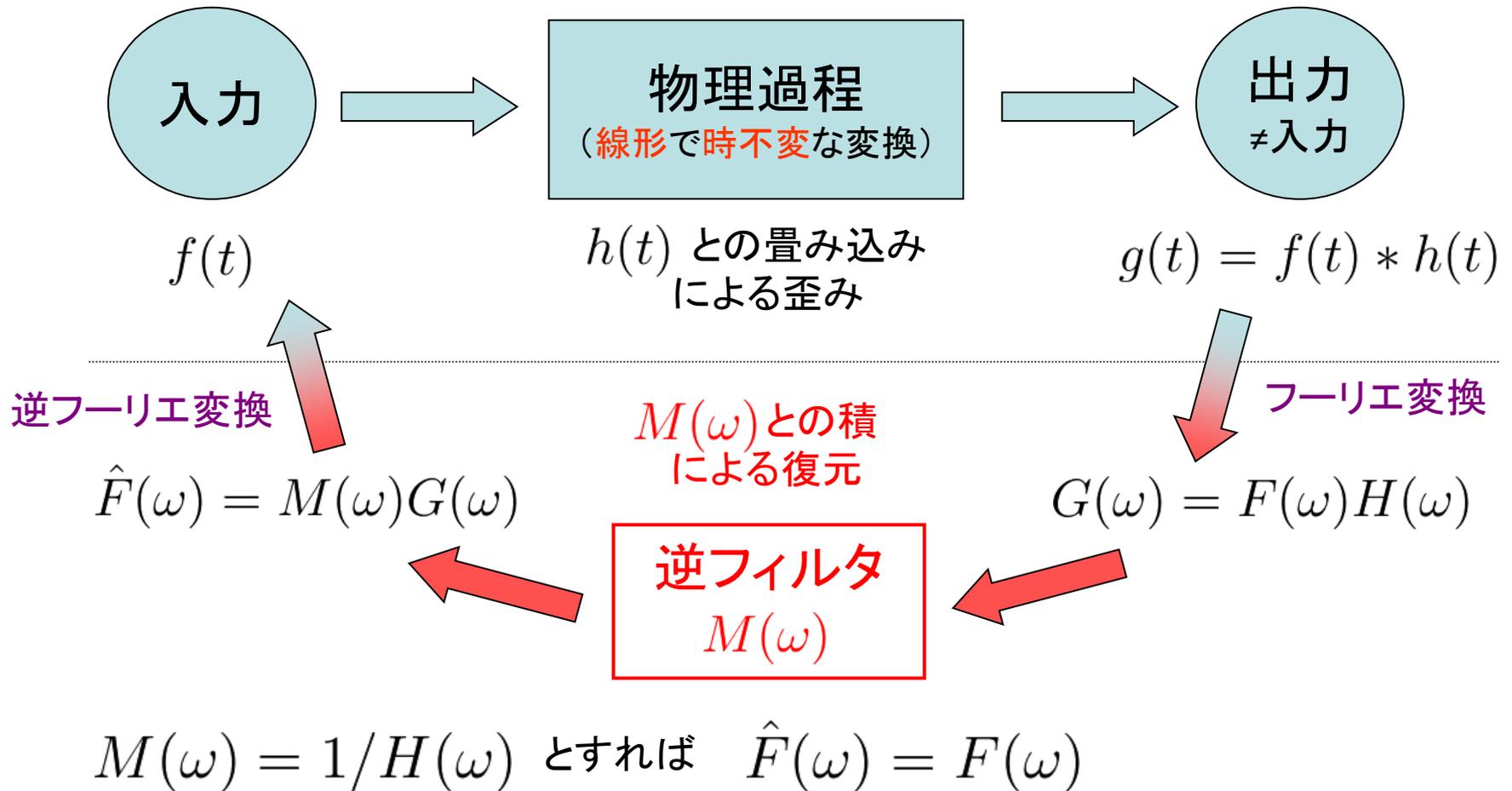
1. 直線位相FIRフィルタの設計
2. 窓関数法によるFIRフィルタの設計
3. アナログフィルタを基にした
デジタルIIRフィルタの設計法 (I)
4. アナログフィルタを基にした
デジタルIIRフィルタの設計法 (II)
5. 双2次フィルタ

0. 逆フィルター（劣化信号の復元）



逆フィルタ(フーリエ変換版)

畳み込みを使った劣化信号の復元



ウィーナ・フィルタ(フーリエ変換版)

◆単純な逆フィルタ:

$$M(u, v) = \frac{1}{H(u, v)} \Rightarrow \text{ノイズ項を無視している}$$

雑音に弱い!

◆低周波成分のみの逆フィルタ:

$$M(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{H(u, v)} & (\sqrt{u^2 + v^2} \leq \omega_0) \\ 1 & (\text{else}) \end{cases} \Rightarrow \text{SN比が比較的大きいと考えられる} \\ \text{低周波領域のみを利用する.}$$

◆ウィーナ・フィルタ(Wiener filter)

$$M(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + [P_N(u, v)/P_S(u, v)]}$$

* は複素共役を表す。
 P_N, P_S はそれぞれ、雑音と
原信号のパワースペクトル。

雑音に関する(統計的)性質を
積極的に利用

⇒ 原画像と復元画像の
平均2乗誤差を最小とするような
変換を求める。

演習課題55

前述のフーリエ変換に基づいた逆フィルタの議論を基にして、Z変換に基づいた逆フィルタの理論を示しなさい。

【注意】物理過程を表すLTIシステムがFIR、IIRの場合に分けて検討すること。また、フィルタの安定性がどうなるかを議論すること。

デジタルフィルタの設計法

0. 逆フィルター

1. 直線位相FIRフィルタの設計

2. 窓関数法によるFIRフィルタの設計

3. アナログフィルタを基にした デジタルIIRフィルタの設計法 (I)

4. アナログフィルタを基にした デジタルIIRフィルタの設計法 (II)

5. 双2次フィルタ

1. 直線位相FIRフィルタの設計

フィルタの機能：入力から不要な成分を取り除く
→望ましい周波数帯域の信号のみ通過させる

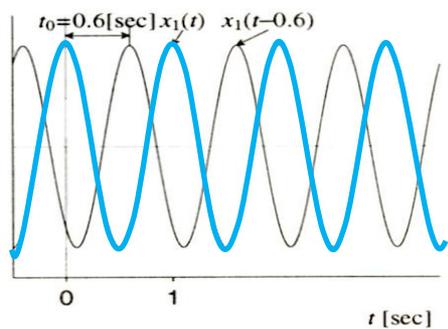
フィルタの設計：機能を実現するインパルス応答
または伝達関数を求めること

1. 因果性を満たす

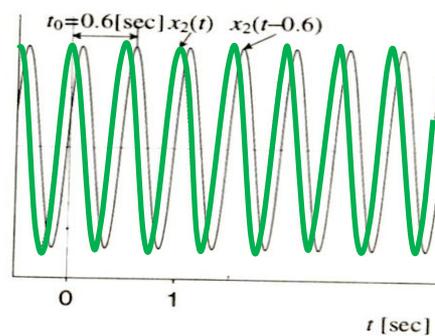
2. 直線位相性 $H[\Omega] = A(\Omega)e^{j\phi(\Omega)} = A(\Omega)e^{-j\alpha\Omega}$

異なる周波数成分の時間遅れが同じでないと
位相ひずみを生じる

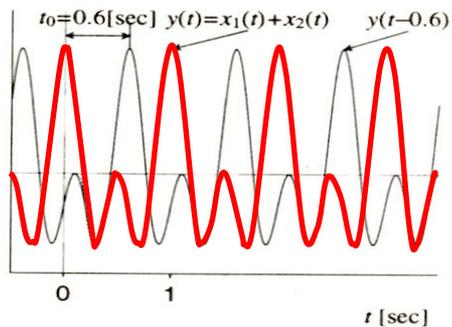
位相歪み



(a)

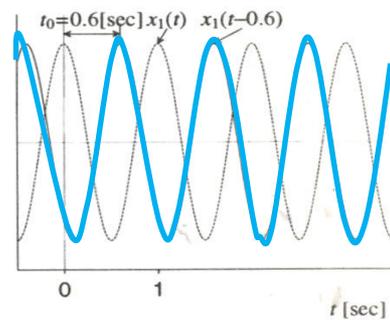


(b)

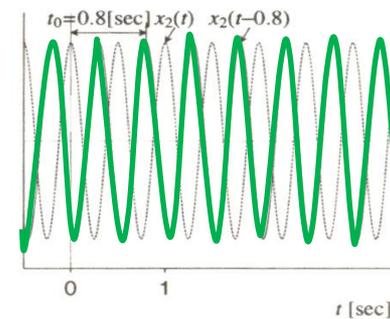


(c)

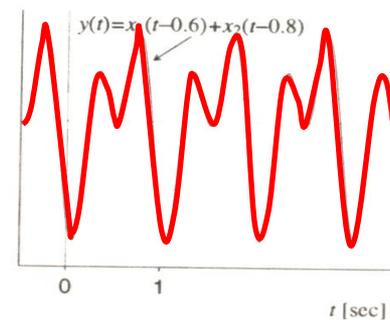
図 6.7 時間がずれた信号例 (一定時間 t_0)



(a)



(b)



(c)

図 6.8 時間がずれた信号例 (異なるずれ)

演習課題56

人間の1つの耳では、各周波数のパワーの変化は知覚できるが、位相変化は知覚しにくいとされている。これを確認してみなさい。

具体的には、モノラルの音楽信号をフーリエ変換し、位相を歪ませて逆フーリエ変換し、元の音楽と違って聞こえるかどうかを試してみよう。

左と右に位相の異なった音楽を流すとどのように聞こえるかも試してみよう。

直線位相特性 / Linear Phase

(プリントに合わせて $\Omega \rightarrow \omega$, $\phi \rightarrow \theta$ と表記)

システム周波数特性: $H[e^{j\omega}] = e^{j\theta(\omega)}$ の場合

入力信号: $x_1[n] = \cos(\omega_1 n)$

出力信号: $y_1[n] = \cos(\omega_1 n + \theta(\omega_1))$

直線位相特性により位相ひずみを回避 $\theta(\omega) = -\alpha\omega$

出力信号:
$$\begin{aligned} y_1[n] &= \cos(\omega_1 n - \omega_1 \alpha) \\ &= \cos(\omega_1 (n - \alpha)) \\ &= x_1[n - \alpha] \end{aligned}$$

任意の周波数の正弦
信号について成立

$y[n] = x[n - \alpha]$

信号全体を α 単位時間だけ遅らせる効果

直線位相フィルタ

FIRフィルタを用いて直線位相特性を実現する条件

インパルス応答の長さ（個数）を N とすると、

伝達関数：

$$H[z] = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] z^{-n}$$

周波数特性：

$$H[e^{j\omega}] = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-j\omega n}$$

線形位相条件 (計4つの場合の対称性)：

- ◆ インパルス応答が偶対称 or 奇対称
- ◆ 個数 N が偶数 or 奇数

直線位相フィルタ (cont.)

- ◆ 場合 1 : N が奇数、偶対称 $h(n) = h(N - n - 1)$
- ◆ 場合 2 : N が偶数、偶対称 $h(n) = h(N - n - 1)$
- ◆ 場合 3 : N が奇数、奇対称 $h(n) = -h(N - n - 1)$
- ◆ 場合 4 : N が偶数、奇対称 $h(n) = -h(N - n - 1)$

いずれかの対称性をもつインパルス応答を利用する

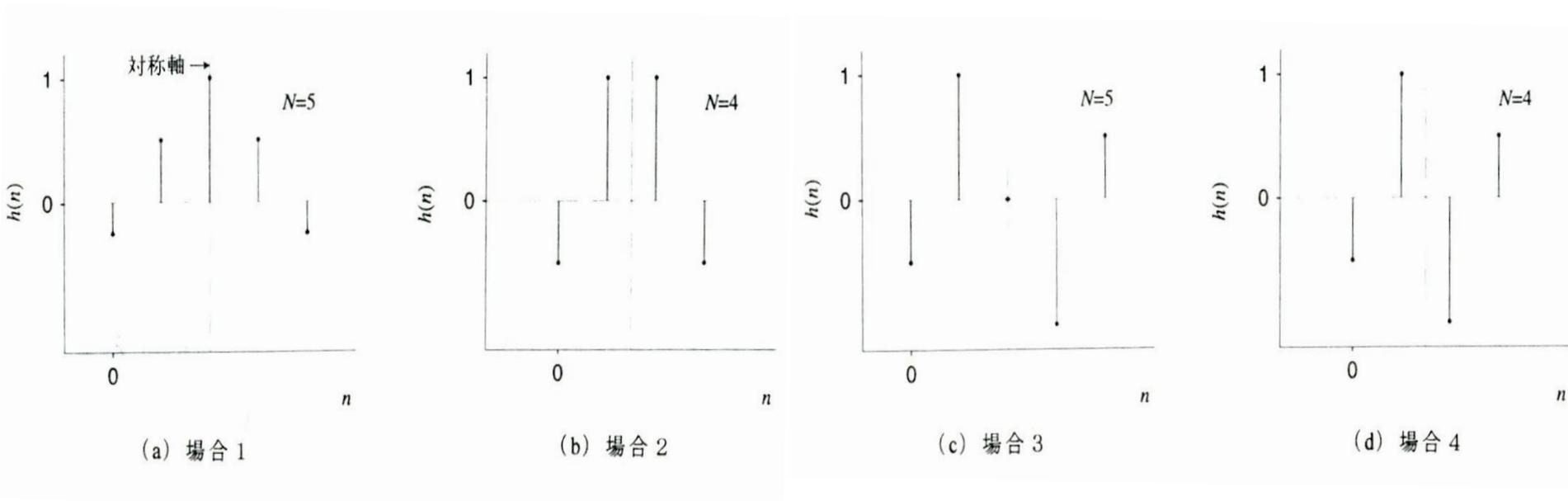


図 6.9 インパルス応答の対称性

因果性を満たすFIRフィルタの周波数特性

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

演習課題57
この表を確認しなさい。



表 6.2 直線位相フィルタの周波数特性

| $h(n)$ | | N | 位相 $\theta(\omega)$ | 振幅 $A(\omega)$ |
|--------|-----|-----|--------------------------|--|
| 場合 1 | 偶対称 | 奇数 | $-\omega(N-1)/2$ | $\sum_{n=0}^{N/2} a_n \cos(\omega n)$ |
| 場合 2 | | 偶数 | $-\omega(N-1)/2$ | $\sum_{n=1}^{(N-1)/2} b_n \cos(\omega(n-1/2))$ |
| 場合 3 | 奇対称 | 奇数 | $-\omega(N-1)/2 + \pi/2$ | $\sum_{n=1}^{(N-1)/2} a_n \sin(\omega n)$ |
| 場合 4 | | 偶数 | $-\omega(N-1)/2 + \pi/2$ | $\sum_{n=1}^{N/2} b_n \sin(\omega(n-1/2))$ |

ただし、 $\begin{cases} a_0 = h((N-1)/2), a_n = 2h((N-1)/2 - n), n \neq 0 \\ b_n = 2h(N/2 - n) \end{cases}$

直線位相フィルタの振幅特性

直線位相フィルタを用いる際の振幅特性の制約：

- 低域通過フィルタ / LPF: 場合 3, 場合 4 → NG
- 高域通過フィルタ / HPF: 場合 2, 場合 3 → NG

演習課題58
これらの性質を確認しなさい。

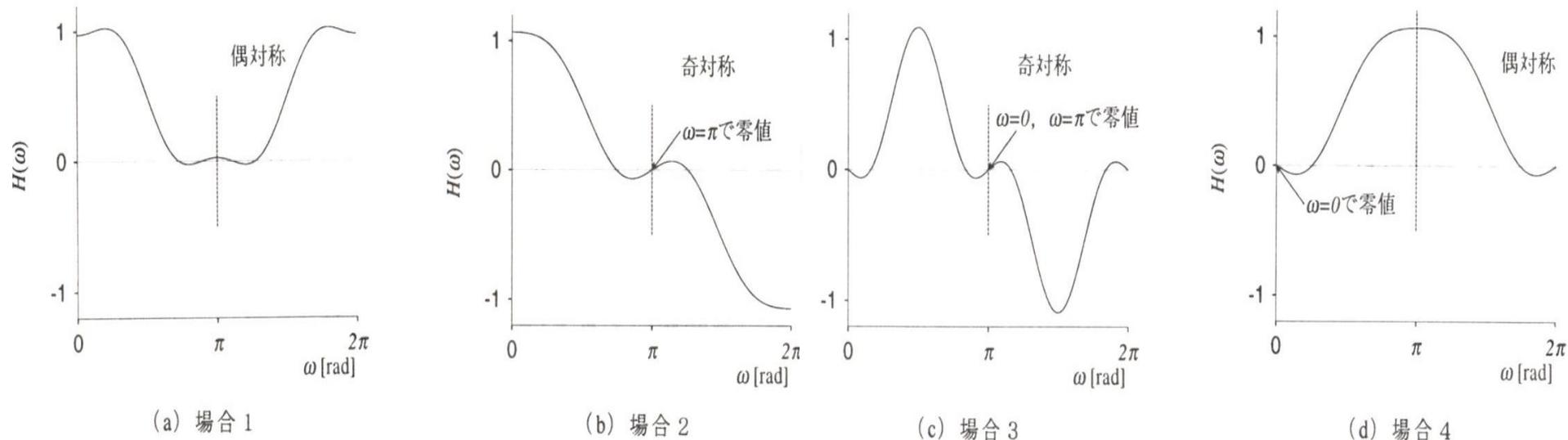


図 6.11 直線位相フィルタの振幅特性